5B1134 MATEMATIK OCH MODELLER
TREDJE FÖRELÄSNINGEN

1. Om derivator

1.1. **Tangentens lutning.** Ett vanligt sätt att tänka sig *derivatan* av en funktion $f(x)$ är att se på grafen för funktionen och sedan på *tangentens lutning* i en viss punkt. Vi tänker oss då att det är lätt att inse vad som menas med en tangent, dvs en rät linje som går genom punkten $(a, f(a))$ och som på något vis ligger mot grafen.

1.2. **Linjär approximation.** Ett annat sätt är att tänka sig att man förstorar upp området kring punkten $(a, f(a))$ så att grafen för funktionen ser ut som en linje. Vi har alltså att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

för x nära a.

Vi kan använda oss av linjär approximation för att se hur derivatan bör fungera i olika situationer. Exempelvis kan vi se hur derivatan av en produkt bör vara genom att se på

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\approx (f(a) + f'(a)\Delta x)(g(a) + g'(a)\Delta x) \\ &= f(a)g(a) + (f'(a)g(a9 + f(a)g'(s))\Delta x + f'(a)g'(a)\Delta x^2 \\ &\approx f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))\Delta x \end{aligned}$$

eftersom Δx^2 är ännu mycket mindre om nu Δx redan är mycket litet.

1.3. **Feluppskattning.** Om vi har mätt upp en storhet x med ett mätfel Δx men egentliigen vill ha reda på $y = f(x)$ kan vi se att mätfelet fortplantas till ett fel i y som ges av

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

vilket ger

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Vi kan alltså se att $f'(x)$ talar om hur mycket felet förstoras eller förminskas när vi räknar ut y från det uppmätta värdet x.

1.4. **Derivatans definition.** När vi har de här två tolkningarna kan vi se hur man skulle kunna finna en mer formell och hållbar definition av vad som menas med derivata. Om vi tänker oss den första definitionen kan vi dra en linje gensom punkterna $(a, f(a))$ och $(a+h, f(a+h))$ och se på lutningen av denna. När h närmar sig noll ska lutningen på linjen närma sig tangentens lutning. Vi har ett striktare matematiskt begrepp som motsvarar *att närma sig* och som vi kallar *gränsvärde*. Vi ska inte gå mer in på definitinen av detta eftersom det kommer att studeras ingående i nästa

Date: 18 september 2006.

kurs. Tanken är att vi bara vi går tillräckligt nära punkten är säkra på att vi ligger mycket nära gränsvärdet. Vi får alltså

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

1.5. **Central differenskvot.** Ibland kan dett vara lättare att hantera den *centrala differenskvoten*

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{(a+h)-(a-h)} = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Däremot kan det hända att gränsvärdet för denna existerar utan att den vanliga differenskvoten har något gränsvärde. Ett enkelt exempel på detta är när $f(x) = |x|$, dvs $f(x) = x$, för $x \geq 0$ och $f(x) = -x$ då $x < 0$. Då blir den centrala differanskvoten för $a = 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0-h)}{(0+h)-(0-h)} = \frac{h-h}{2h} = 0$$

för alla $h > 0$, medan den vanliga differenskvoten blir -1 för negativa h och $+1$ för positiva h.

1.6. **Derivatan av trigonometriska funktionerna.** Vi börjar med att derivera $\sin x$ i punkten $x = 0$. Alltså är vi intresserade av gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$$

då h går mot noll. Vi kan anta att $h > 0$ eftersom både täljare och nämnare byter tecken då h byter tecken. Genom att betrakta en cirkelsektor i enhetscirkeln med öppningsvinkel h och en triangel med hörnen $(0,0)$, $(1,0)$ och $(\cos x, \sin h)$. Enligt areasatsen är arean av triangeln

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin h$$

medan arean av cirkelsektorn är $h/2$. Eftersom triangeln ligger i cirkelsektorn får vi

$$\frac{\sin}{2} < \frac{h}{2}$$

och

$$\frac{\sin h}{h} < 1$$

Om vi å andra sidan tittar på triangeln med hörn $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1, \tan h)$ får vi en triangel som inneåller cirkelsektorn. Därmed är

$$\frac{h}{2} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan h = \frac{\sin h}{2\cos h}$$

vilket ger

$$\frac{\sin h}{h} > \cos h$$

Alltså måste vi ha

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$$

för alla h som ligger mellan 0 och $\pi/2$.

Eftersom
$$\lim_{h\to 0}\cos h = 1$$
och
$$\lim_{h\to 0} 1 = 1$$
måste även gränsvärdet för $\sin h/h$ då h går mot noll finnas och vara lika med 1. Vi har allstå kommit fram till att $\sin x$ är deriverbar i punkten $x = 0$ och att derivatan är $\sin' 0 = 1$,

Vi kan också titta på derivatan av $\cos x$ då $x = 0$. Vi har då differenskvoten
$$\frac{\cos h - \cos 0}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}\cdot\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$$
Vi ser att beloppet av denna differenskvot är mindre än $\sin h$ enligt de räkningar vi gjort tigigare med kvoten $\sin h/h$. Alltså måste gränsvärdet av kvoten existera och vara lika med 0.

Vi har nu derivatorna av $\sin x$ och $\cos x$ i punkten $x = 0$. För att få derivatorna i andra punkter kan vi använda additionssaterna
$$\sin(a + x) = \sin a\cos x + \cos a\sin x$$
Därmed får vi att
$$\sin'(a) = \sin a\cos' 0 + \cos a\sin' 0 = \cos a$$
och eftersom
$$\cos(a + x) = \cos a\cos x - \sin a\sin x$$
får vi också att
$$\cos'(a) = \cos a\cos' 0 - \sin a\sin' 0 = -\sin a.$$
Här har vi använt *linjäritet*, dvs att om $f(x)$ och $g(s)$ är deriverbara med derivator $f'(a)$ och $g'(a)$ i punkten $x = a$ så är också
$$h(x) = Af(x) + Bg(x)$$
deriverbar i $x = a$ med derivata
$$h'(a) = Af'(a) + Bg'(a).$$
Det är klart att vi kan kontrollera linjäritet antingen genom den strikta definitionen av derivatan, eller genom att betrakta linjära appoximationer. Det kommer också att bli klart i nästa kurs att vi kan göra dessa linjära approximationer lika rigorösa som definitionen med gränsvärden.

Övning 1.1. *Använd central differenskvot för att härleda derivatan av* $\tan x$. *(*Obs! Det fungerar för att vi redan vet att $\tan x$ är deriverbar där den är definierad.*)*

Övning 1.2. *Använd linjär approximation för att komma fram till formeln för derivatan av en kvot,* $h(x) = f(x)/g(x)$.