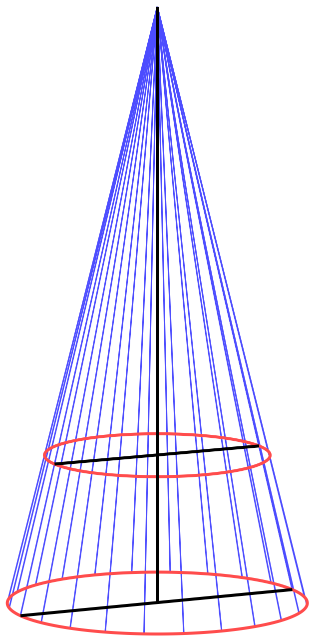
KTH Teknikvetenskap

5B1134 MATEMATIK OCH MODELLER
FEMTE FÖRELÄSNINGEN — INTEGRALER

1. OM INTEGRALER

1.1. **Primitiva funktioner.** Vi har sett tidigare att vissa funktioner, $f(x)$, har *primitiva funktioner*, dvs en funktion, $F(x)$, vars derivata $F'(x) = f(x)$. Om $F(x)$ är en primitiv funktion är $F(x) + C$ också en primitiv funktion för alla konstanter C, eftersom derivatan av en konstant alltid är noll.

Exempel. Om vi ser på en cirkulär kon med bottenradie R och höjd H kan vi se på volymen av den delkon som har höjd x som en funktion $V(x)$.



Om vi deriverar funktionen $V(x)$ får vi

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}.$$

Date: 2 oktober 2006.

Vi kan tolka $V(x+h) - V(x)$ som volymen av en skiva med tjocklek h. Om $A(x)$ är konens tvärsnittsarea på avstånd x från toppen får vi att

$$A(x)h < V(x+h) - V(x) < A(x+h)h$$

och därmed är

$$A(x) < \frac{V(x+h) - V(x)}{h} < A(x+h).$$

När vi låter $h > 0$ krympa mot noll får vi att

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = A(x).$$

Eftersom vi nu vet att

$$A(x) = \pi \left(\frac{Rx}{H} \right)^2$$

måste vi leta efter en primitiv funktion till x^2. Vi vet att vi får $3x^2$ när vi deriverar x^3, och därmed får vi x^2 när vi deriverar $x^3/3$. Enligt våra uträkningar är $V(x)$ en primitiv funktion till

$$A(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2$$

och alltså måste

$$V(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} + C$$

för någon konstant C. Nu vet vi också att $V(0) = 0$, vilket ger $C = 0$ och vi får hela konens volym som

$$V(H) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

1.2. **Integraler.** Om vi har en funktion $f(x)$ med en primitiv funktion $F(x)$ kan vi låta

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

och vi kan tolka detta uttryck som arean mellan grafen för $f(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$ och x-axeln. Vi skriver ofta också

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exempel. Vi har enligt ovan att $x^3/3$ är en primitiv funktion till x^2 och därmed

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Tolkningen av detta som en areaberäkning ger att arean av området mellan x-axeln och kurvan $y = x^2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $1/3$.

1.3. **Rotationsvolymer.** Om vi ser tillbaka på exemplet med konen ser vi att vi egentligen inte använt oss av att det är fråga om en cirkulär kon annat än när vi har beräknat $A(x)$. Vi får i vilket fall som helst att

$$V'(x) = A(x)$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean på avstånd x från toppen. Vi har därför att

$$V(H) = V(H) - V(0) = \int_0^H A(x)\,dx.$$

Om vi istället hade haft en rotationskropp som fås genom att rotera en kurva $y = f(x)$ runt x-axeln, hade tvärsnittsarean varit given av

$$A(x) = \pi f(x)^2$$

och volymen blir

$$V(H) = \int_0^H \pi f(x)^2\,dx.$$

Om vi exempelvis ser ett klot som att kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $-r \le x \le r$ får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[xr^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \\ &= \pi r^3 - \pi\frac{r^3}{3} - \pi(-r^3) + \pi\frac{(-r)^3}{3} = \pi\frac{3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

1.4. **Differenser och summor.** Vi kan jämföra sambandet mellan derivata och integral med sambandet mellan differenser och summor. Om vi har en följd av tal, exempelvis

$$0, 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$$

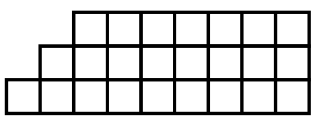
kan vi bilda *differenser*, eller *skillnader*, genom $1 - 0 = 1$, $3 - 1 = 2$, $6 - 3 = 3$, osv och får en ny följd

$$1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$$

Här är det klart att om vi kommer ihåg det första talet i den första följden, och sedan bara differenserna, kan vi få tillbaka hela den första följden genom att summera:

$$1 = 1, \qquad 1+2 = 3, \qquad 1+2+3 = 6, \qquad 1+2+3+3 = 9, \qquad 1+2+3+3+3 = 12, \ldots$$

Ritar vi upp det med rutor får vi



Vi kan nu tolka den första följden som antalet rutor till vänster om en viss linje.

2. Partiell integration

Det finns inga metoder som alltid fungerar för att finna primitiva funktioner, eller till att beräkna bestämda integraler. Däremot finns några tekniker som kan användas för att i de fall det går omforma problemet till ett enklare problem.

Ett sådant är *partiell integration*, som är ett slags omvändning av produktregeln vid derivering. Som vi vet är derivatan av en produkt, $h(x) = f(x)g(x)$, given av

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Om vi nu står inför att finna en primitiv funktion till en produkt $f(x)g(x)$ och redan känner en primitiv funktoin, $F(X)$, till $f(x)$ kan vi försöka vända på sambandet och få

$$f(x)g(x) = F'(x)g(x) = (F(x)g(x))' - F(x)g'(x)$$

Eftersom vi nu ser att $F(X)g(x)$ är en primitiv funktion till den första termen kan vi finna en primitiv funktion till $f(x)g(X)$ om vi också kan finna en primitiv funktion till $F(x)g'(x)$. Vår förhoppning är att detta problem i någon mening är lättare än det ursprungliga.

Exempel. Om vi är intresserade av att beräkna

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx$$

kan vi först finna en primitiv funktion till $\sin x$, som ges av $-\cos x$, och därmed få

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin x \, dx &= [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= \pi(-(-1)) - 0 \cdot (-1) + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 - 0 = \pi.\end{aligned}$$

Här blev det senare problemet enklare för att funktionen inte längre är en produkt av ett polynom med en trigonometrisk funktion utan en ren trigonometrisk funktion vars primitiva funktion vi väl kände till. Så behöver det inte alltid bli på en gång. Ibland kan man behöva upprepa proceduren flera gånger.

Övning 2.1. *Beräkna integralerna*

$$\int_0^1 xe^{-x} \, dx$$

och

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$$

med hjälp av partiell integration.

Övning 2.2. *Beräkna integralerna*

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$$

och

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$$

med hjälp av partiell integration.

2.1. **Variabelbyte.** Vi har sett att man ibland kan använda produktregeln baklänges och få en metod för att integrera en produkt. På samma sätt kan vi ibland använda kedjeregeln baklänges för att integrera en sammansatt funktion.

Antag att vi vill integrera utföra en integral är integranden skulle se lättare ut om vi uttryckte den oberoende variabeln x som en funktion i en annan variabel t, dvs $x = g(t)$. Vi behöver då se hur kejderegeln skulle kunna användas. Om nu $F(x)$ var en primitiv funktion till $f(x)$ skulle vi ha att

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

Om vi ivll använda detta kan vi integrera båda sidor och får då

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d (F(g(t)))'\,dt = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Det betyder att vi kan tänka oss att vi har gjor följande förändringar

$$\begin{cases} x &= g(t) \\ dx &= g'(t)dt \\ a &= g(c) \\ b &= g(d) \end{cases}$$

Exempel. För att beräkna

$$\int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

för positiva värden på a kan det vara intressant att göra variabelbytet

$$x = \sqrt{r^2 - t^2}.$$

När vi deriverar $\sqrt{r^2 - t^2}$ får vi

$$\frac{-2t}{2\sqrt{r^2 - t^2}}$$

och därmed leder variabelbytet till

$$\begin{cases} x &= g(t) = \sqrt{r^2 - t^2} \\ dx &= g'(t)\,dt = -t/\sqrt{r^2 - t^2}\,dt \\ a &= g(\sqrt{r^2 - a^2}) \\ r &= g(0) \end{cases}$$

vilket gör att

$$\begin{aligned} \int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 \sqrt{r^2 - t^2} \cdot t \cdot \frac{-t}{\sqrt{r^2 - t^2}}\,dt \\ &= \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 -t^2\,dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 = \frac{1}{3}(r^2 - a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Vi kan också göra variabelbytet $x = \sqrt{t}$ och får då

$$\begin{cases} x &= g(t) = \sqrt{t} \\ dx &= g'(t)\,dt = 1/(2\sqrt{t})\,dt \\ a &= g(a^2) \\ r &= g(r^2) \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{a^2}^{r^2} \sqrt{t}\sqrt{r^2 - t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_{a^2}^{r^2} \frac{1}{2}(r^2 - t)^{1/2}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{-2}{3}(r^2 - t)^{3/2}\right]_{a^2}^{r^2} = \frac{1}{3}(r^2 - a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Övning 2.3. *Använd variabelbytet $x = \sin t$ för att beräkna integralerna*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

och

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Övning 2.4. *Använd variabelbytet $t = \sin x$ för att beräkna integralerna*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$$

och

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx.$$

Övning 2.5. *Använd variabelbytet $t = e^x$ för att beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{1 + e^x} x\,dx.$$