

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2, 2006

Uppgift

- a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ till ekvationen

$$2 \tan(3x + 2) = 1.$$

Ange svaren i radianer med två gällande siffrors noggrannhet. (3)

- b) Skriv $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ på formen $A \sin(2x + \phi)$. Ange svaret exakt. (3)

- c) Bestäm exakta värden på samtliga lösningar till ekvationen

$$2 \sin^2 x + \sin 2x = 2.$$

(3)

Lösningsförslag

- a) Genom att dela bägge led med 2 kan vi skriva ekvationen som

$$\tan(3x + 2) = \frac{1}{2}.$$

Vi kan nu använda tabell, eller miniräknare, för att se att i intervallet $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ är $\tan t = 1/2$ för $t = t_0 \approx 0,46$. Vi får sedan samtliga lösningar genom att lägga på multipler av perioden för tangens, som är π . Vi ska nu se på ekvationen

$$3x + 2 = t_0 + n\pi$$

som har lösningen

$$x = \frac{t_0 - 2}{3} + \frac{n\pi}{3}$$

Den första lösningen vi finner är för $n = 0$, då

$$x \approx \frac{0,46 - 2}{3} \approx -0,51.$$

För $n = 1$ får vi

$$x \approx \frac{0,46 - 2}{3} + \frac{\pi}{3} \approx 0,54.$$

Eftersom $\pi/3 \approx 1,05$, och $\pi/4 \approx 0,79$, kommer $n < 0$ och $n > 1$ att leda till lösningar som ligger utanför intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.

b) Genom additionssatsen för sinus har vi att

$$A \sin(2x + \phi) = A \sin 2x \cos \phi + A \cos 2x \sin \phi$$

och om vi vill att detta skall vara lika med $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ kan vi låta

$$\begin{cases} A \cos \phi = 1 \\ A \sin \phi = \sqrt{3} \end{cases}$$

Genom att kvadrera båda ekvationerna och lägga ihop, led för led, får vi

$$A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 1^2 + (\sqrt{3})^2,$$

vilket ger $A^2 = 4$. Alltså kan vi välja $A = 2$ och vi får då att

$$\begin{cases} \cos \phi = 1/2 \\ \sin \phi = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Vi kan därför välja $\phi = \pi/3$ och

$$\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x + \pi/3).$$

c) Vi kan skriva om $\sin^2 x$ som $(1 - \cos 2x)/2$, med hjälp av formeln för halva vinkeln och ekvationen blir då

$$1 - \cos 2x + \sin 2x = 2,$$

vilket också kan skrivas

$$\sin 2x - \cos 2x = 1.$$

Vänsterledet kan, med samma metod som i föregående deluppgift, skrivas som $\sqrt{2} \sin(2x - \pi/4)$ och därmed blir ekvationen

$$\sin(2x - \pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Eftersom $\sin t = 1/\sqrt{2}$ för $t = \pi/4 + 2\pi n$ och $t = 3\pi/4 + 2\pi n$, får vi samtliga lösningar genom

$$2x - \pi/4 = \pi/4 + 2\pi n \quad \text{och} \quad 2x - \pi/4 = 3\pi/4 + 2\pi n$$

där n är ett godtyckligt heltal. Genom att lösa ut x ur detta får vi

$$x = \pi/4 + n\pi \quad \text{och} \quad x = \pi/2 + n\pi$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Alternativ metod: Vi kan skriva högerledet som $2 = 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$, vilket leder till

$$\sin 2x = 2 \cos^2 x.$$

Om vi nu skriver om $\sin 2x$ som $2 \sin x \cos x$ får vi att ekvationen blir

$$2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$$

och vi kan faktorisera som

$$2 \cos x (\sin x - \cos x) = 0.$$

Därmed får vi lösningar till ekvationen precis om någon av faktorerna är noll. Vi har att $\cos x = 0$ för $x = \pi/2 + n\pi$ och $\sin x - \cos x = 0$ för $x = \pi/4 + n\pi$.

Svar:

- a) Lösningarna är $x = -0,51$ och $x = 0,54$, med två värdesiffrors noggrannhet.
- b) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x + \pi/3)$.
- c) Lösningarna ges av $\pi/2 + n\pi$ och $x = \pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

Bedömningskriterier

- a)
 - En korrekt lösning till ekvationen, **1 poäng**.
 - Korrekta lösningar i intervallet, **1 poäng**.
 - Korrekt motivering till att det inte finns andra lösningar, **1 poäng**.
 - Högst två poäng om antalet värdesiffror inte är korrekt.
- b)
 - Korrekt motiverat värde på A , **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat värde på ϕ , **2 poäng**.
 - Högst två poäng om det saknas motivering till vilken av lösningarna till $\tan \phi = \sqrt{3}$ som fungerar.
 - Högst en poäng om svaren inte angivits exakt.
- c)
 - En korrekt lösning till ekvationen, **1 poäng**.
 - Korrekt allmän lösning, **1 poäng**.
 - Korrekt motivering för att alla lösningar hittats, **1 poäng**.
 - Högst en poäng om svaren inte angivits exakt.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.