

5B1134 Matematik och modeller

Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 3, 2006

Uppgift

- a) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \tan x, \quad 0 < x < \pi/2.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = x^3 - 3x + 1$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaren på exakt form. (3)

- c) Använd Newton-Raphsons metod för att finna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$x^3 + 1 = 3x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x_0 = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta noggrannheten i svaret. (3)

Lösningsförslag

Vi börjar med att derivata den första faktorn, $g(x) = e^{-\sqrt{x}}$ med hjälp av kedjeregeln. Derivatan av e^x är e^x och derivatan av den inre funktionen $-\sqrt{x}$ är $-(1/2)x^{-1/2} = -1/(2\sqrt{x})$, eftersom $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Alltså får vi enligt kedjeregeln att

$$(e^{-\sqrt{x}})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}.$$

Derivatan av den andra faktorn, $h(x) = \tan x$ kan vi få genom kvotregeln, i och med att $\tan x = \sin x / \cos x$. Därmed är

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vi kan nu använda produktregeln för att derivata $f(x) = g(x)h(x)$ och får

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} \tan x + e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sqrt{x} - \cos^2 x \tan x}{2\sqrt{x} \cos^2 x} e^{-\sqrt{x}}.$$

b) Vi börjar med att derivera funktionen $g(x) = x^3 - 3x + 1$ för att kunna hitta eventuella nollställena hos derivatan. Eftersom det är ett polynom finns derivatan i varje punkt och vi får

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Nollställena ges därmed av $x = \pm 1$, varav endast $x = 1$ ligger i det givna intervallet. Vi får nu jämföra funktionens värden i dessa punkter med funktionens värden i ändpunkterna för att hitta funktionens största och minsta värde på intervallet. Vi har

x	0	1	2
$g(x)$	$0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$	$1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$	$2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$

Eftersom $-1 < 1 < 3$ är funktionens minimum -1 och funktionens maximum 3 . Minimum antas endast vid $x = 1$ och maximum vid $x = 2$.

c) För att använda Newton-Raphsons metod behöver vi först skriva om ekvationen som $f(x) = 0$, med $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Vi får då att

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Om vi börjar med $x_0 = 0$ får vi därmed att nästa approximation med Newton-Raphsons metod blir

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 + 1}{3x_0^2 - 3} = 0 - \frac{0^3 - 3 \cdot 0 + 1}{3 \cdot 0^2 - 3} = \frac{1}{3}$$

och den andra approximationen blir

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 3x_1 + 1}{3x_1^2 - 3} = \frac{1}{3} - \frac{(1/3)^3 - 3 \cdot (1/3) + 1}{3 \cdot (1/3)^2 - 3} = \frac{25}{72} \approx 0,347222.$$

En uppskattning av felet fås genom att beräkna nästa korrektion, dvs

$$\frac{x_2^3 - 3x_2 + 1}{3x_2^2 - 3} \approx -0,00007.$$

Alltså är $x_2 = 0,3472$ ett närmevärde med en noggrannhet på $0,0001$.

Svar:

a) $f'(x) = (2\sqrt{x} - \cos^2 x \tan x)e^{-\sqrt{x}} / (2\sqrt{x} \cos^2 x).$

b) Funktionens maximum är 3 och dess minimum är -1 på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

c) Efter två iterationer får vi $x_2 = 0,3472$ som är ett närmevärde med en noggrannhet på $0,0001$.

Bedömningskriterier

- a) – Korrekt användning av produktregeln, **1 poäng**.
 - Korrekt användning av kedjeregeln, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd derivering, **1 poäng**.
- b) – Korrekt analys av nollställena till derivatan, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat maximum, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat minimum, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst två poäng om svaren ej angivits på exakt form.
- c) – Korrekt användning av Newton-Raphsons metod med två iterationer, **1 poäng**.
 - Korrekt värde efter två iterationer, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverad noggrannhet, **1 poäng**.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.