

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 4, 2006

Uppgift

- a) Beräkna arean mellan graferna för funktionerna $g(x) = \sin 2x$ och $h(x) = \cos x$ på intervallet $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Ange svaret på exakt form. (4)
- b) Använd trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall för att beräkna ett närmevärde till integralen

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2/2} dx.$$

Ange svaret med tre siffrors noggrannhet. (2)

- c) Beräkna integralen

$$\int_1^2 x^4 \ln x dx.$$

Ange svaret på exakt form. (3)

Lösningsförslag

- a) För att kunna beräkna arean mellan graferna behöver vi finna skärningspunkterna. Graferna skär varandra när $g(x) = h(x)$, dvs när

$$\cos x = \sin 2x.$$

Om vi skriver $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ får vi att ekvationen blir

$$\cos x = 2 \cos x \sin x$$

Alltså får vi skärningar där $\cos x = 0$ eller $\sin x = 1/2$. I det givna intervallet har den första av dessa lösningar vid ändpunkterna $x = \pm\pi/2$. Den andra ekvationen har en enda lösning, $x = \pi/6$, i intervallet. På intervallet $-\pi/2 \leq x \leq \pi/6$ är $\cos x \geq \sin 2x$ och på intervallet $\pi/6 \leq x \leq \pi/2$ är $\cos x \leq \sin 2x$. Alltså ges arean mellan graferna av

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (\cos x - \sin 2x) dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin 2x - \cos x) dx.$$

Eftersom derivatan av $\cos 2x$ är $-2 \sin 2x$ är $-1/2 \cos 2x$ en primitiv funktion till $\sin 2x$. Vidare är $\sin x$ en primitiv funktion till $\cos x$. Alltså får vi att arean ges av

$$\begin{aligned} & \left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/6} + \left[\frac{-\cos 2x}{2} - \sin x \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{6} - \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos(-\pi) - \frac{1}{2} \cos \pi - \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (-1) - \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}(-1) - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

b) Låt $f(x) = e^{-x^2/2}$. Om vi delar in intervallet $-1 \leq x \leq 1$ i fyra delintervall får varje intervall längd $\Delta x = 1/2$. Alltså ger trapetsmetoden uppskattningen

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{2} \cdot (f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (e^{-1/2} + 2e^{-1/8} + 2e^0 + 2e^{-1/8} + e^{-1/2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1/2} + e^{-1/8} \approx 1,686 \end{aligned}$$

c) Enklast är att använda partiell integration och se integranden som $f(x) = g'(x)h(x)$, där $g'(x) = x^4$ och $h(x) = \ln x$. Vi får då att

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^4 \ln x dx &= \left[\frac{x^5}{5} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2^5}{5} \ln 2 - \frac{1}{5} \ln 1 - \left[\frac{x^5}{25} \right]_1^2 \\ &= \frac{32}{5} \ln 2 - \frac{32}{25} + \frac{1}{25} \\ &= \frac{160 \ln 2 - 31}{25}. \end{aligned}$$

Vi kan också använda variabelbytet $x = e^t$, dvs, $t = \ln x$ och får då

$$\begin{cases} x = e^t \\ dx = e^t dt \\ x = 1 \Leftrightarrow t = \ln 1 = 0 \\ x = 2 \Leftrightarrow t = \ln 2 \end{cases}$$

Alltså kan vi skriva om integralen som

$$\int_1^2 x^4 \ln x dx = \int_0^{\ln 2} e^{4t} t e^t dt = \int_0^{\ln 2} t e^{5t} dt.$$

Man kan nu använda partiell integration i ett steg för att få

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} t e^{5t} dt &= \left[\frac{t e^{5t}}{5} \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \frac{e^{5t}}{5} dt \\ &= \frac{\ln 2 \cdot 2^5}{5} - \left[\frac{e^{5t}}{25} \right]_0^{\ln 2} = \frac{32 \ln 2}{5} - \frac{2^5}{25} + \frac{1}{25} = \frac{160 \ln 2 - 31}{25}. \end{aligned}$$

Svar:

- a) Arean mellan graferna är $5/2$ areaenheter.
- b) Trapetsmetoden med fyra delintervall ger $\int_{-1}^1 e^{-x^2/2} dx \approx 1,69$.
- c) $\int_1^2 x^4 \ln(x) dx = (160 \ln 2 - 31)/25$.

Bedömningskriterier

- a)
 - Korrekt uppdelning av arean som en summa av två integraler, **1 poäng**.
 - Korrekta primitiva funktioner, **1 poäng**.
 - Korrekt insättning av gränserna, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd beräkning med korrekt svar, **1 poäng**.
 - Högst tre poäng om svaret ej är angivet på exakt form.
- b)
 - Korrekt uppställd trapetsmetod med fyra delintervall, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd beräkning, **1 poäng**.
 - Högst en poäng om svaret ej är angivet med tre värdesiffror.
- c)
 - Korrekt utförd partiell integration, **1 poäng**.
 - Korrekta primitiva funktioner, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd integration med korrekt svar, **1 poäng**.
 - Högst en poäng om svaret ej är angivet på exakt form.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.