



KTH Teknikvetenskap

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 16 oktober 2006

1. a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 22 m, 53 m och 43 m. Ange svaren som närmevärden med en decimals noggrannhet. **(3)**
- b) En fyrhörning har sidlängder 4,3 cm, 5,3 cm, 8,2 cm och 5,6 cm i denna ordning. Vinkeln mellan den förstnämnda och den sistnämnda sidan är 35° . Bestäm fyrhörningens area. **(3)**
- c) Bestäm arean av det minsta cirkelsegment som bildas då en rätvinklig triangel med sidlängder 5 cm, 12 cm, och 13 cm skrivs in i en cirkel, så att alla tre hörnen ligger på cirkelns periferi. **(3)**

Lösning: a) Vi kallar sidlängderna för a , b och c och motstående vinklar för α , β och γ . Om $a = 22$ m, $b = 53$ m och $c = 43$ m får vi enligt cosinussatsen att

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2087}{2279} \approx 0,916$$

vilket motsvarar $\alpha \approx 23,7^\circ$,

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{119}{473} \approx -0,252,$$

vilket motsvarar $\beta \approx 104,6^\circ$, och

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{361}{583} \approx 0,619,$$

som motsvarar $\gamma \approx 51,7^\circ$. Vi kan kontrollera att $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

b) Om vi kallar hörnen för A , B , C och D har vi fått givet att $|AB| = 4,3$ cm, $|BC| = 5,3$ cm, $|CD| = 8,2$ cm och $|DA| = 5,6$ cm. Dessutom vet vi att vinkeln vid A är $\alpha = 35^\circ$. Vi kan med hjälp av cosinussatsen skriva upp två ekvationer för sträckan $d = |BD|$, dels genom triangeln ABD , dels genom triangeln BCD . Detta ger att

$$\begin{aligned} d^2 &= |AB|^2 + |DA|^2 - 2|AB| \cdot |DA| \cos \alpha \\ &= |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC| \cdot |CD| \cos \gamma \end{aligned}$$

och vi kan lösa ut vinkeln vid C , γ , genom

$$\cos \gamma = \frac{|BC|^2 + |CD|^2 - |AB|^2 - |DA|^2 + 2|AB| \cdot |DA| \cos \alpha}{2|BC| \cdot |CD|}$$

När vi sätter in de givna värdena på sidorna och vinkeln får vi

$$\cos \gamma = \frac{5,3^2 + 8,2^2 - 4,3^2 - 5,6^2 + 2 \cdot 4,3 \cdot 5,6 \cos 35^\circ}{2 \cdot 5,3 \cdot 8,2} \approx 0,977.$$

Alltså får vi $\gamma \approx 12,3^\circ$. Arean av fyrhörningen ges nu av summan av areorna av de två triangelarna ABD och BCD , dvs enligt areasatsen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|AB| \cdot |DA| \sin \alpha + \frac{1}{2}|BC| \cdot |CD| \sin \gamma \\ = \frac{4,3 \cdot 5,6 \sin 35^\circ}{2} + \frac{5,3 \cdot 8,2 \sin 12,3^\circ}{2} \text{ cm}^2 \approx 11,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

c) Eftersom triangeln är rätvinklig hamnar hypotenusan som diagonal i cirkeln. Det minsta cirkelsegmentet är det som bildas av sidan med kortast längd, $a = 5$ cm. Cirkelns radie är $r = 13/2 = 6,5$ cm. Vi kan få öppningsvinkeln, ϕ , genom cosinussatsen som

$$\cos \phi = \frac{2r^2 - a^2}{2r^2} = \frac{119}{169}$$

och $\phi \approx 0,7896$ radianer. Cirkelsegmentets area blir således

$$\frac{r^2 \phi}{2} - \frac{r^2}{2} \sin \phi \approx 1,68 \text{ cm}^2.$$

Svar:

- a) Vinklarna är $\alpha \approx 23,7^\circ$, $\beta \approx 104,6^\circ$ och $\gamma \approx 51,7^\circ$, med en decimals noggrannhet.
 - b) Fyrhörningens area är $11,5 \text{ cm}^2$.
 - c) Cirkelsegmentets area är $1,68 \text{ cm}^2$.
2. a) Bestäm de två minsta positiva lösningarna till ekvationen

$$13 \sin \left(\frac{3\pi t - 2\pi}{10} \right) = 8.$$

Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet. (3)

- b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + 3 \cos^2 t = 1$$

Ange svaren på exakt form. (3)

c) Bestäm konstanterna a , b och ω så att ekvationen

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = 2$$

har lösningarna $t = -2 + 24n$ och $t = 4 + 24n$, där n är ett godtyckligt heltal.
Ange svaren på exakt form. (3)

Lösning: a) Om vi sätter $x = (3\pi t - 2\pi)/10$ kan vi skriva ekvationen som

$$\sin x = 8/13.$$

Vi får en lösning som $x = \arcsin 8/10 \approx 0,663$ och den andra lösningen i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ ges av $x = \pi - \arcsin 8/13 \approx 2,479$. De övriga lösningarna fås genom att lägga på multipler av 2π som är perioden för $\sin x$. Vi kan lösa ut t som en funktion av x och får då

$$t = \frac{10x + 2\pi}{3\pi}.$$

Den första lösningen ger

$$t \approx \frac{10 \cdot 0,663 + 2\pi}{3\pi} \approx 1,37$$

och den andra ger

$$t \approx \frac{10 \cdot 2,479 + 2\pi}{3\pi} \approx 3,30.$$

Perioden för högerledet i ekvationen är $2\pi/(3\pi/10) = 20/3 \approx 6,67$. Alltså blir närmaste mindre lösningar $1,37 - 6,67 = -5,30 < 0$ och $3,30 - 6,67 = -3,37$. Eftersom båda dessa är negativa har vi funnit de båda minsta positiva lösningarna till ekvationen.

b) Vi kan skriva om högerledet som $\sin^2 t + \cos^2 t$ med hjälp av trigonometriska ettan. Då får vi ekvationen

$$\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + 3 \cos^2 t = \sin^2 t + \cos^2 t$$

vilket förenklas till

$$2 \sin t \cos t + 2 \cos^2 t = 0.$$

Om vi faktorerar vänsterledet får vi

$$2(\sin t + \cos t) \cos t = 0.$$

Därmed ges lösningarna av nollställena till $\cos t$ och $\sin t + \cos t$. Den förstnämnda har nollställena $\pi/2 + n\pi$ och den andra kan vi skriva som

$$\sin t + \cos t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan t = -1$$

eftersom $\sin t$ och $\cos t$ inte kan vara noll samtidigt. Lösningarna blir därmed $t = \arctan(-1) + n\pi = -\pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) För att perioden skall vara $T = 24$ behöver vinkelhastigheten vara $\omega = 2\pi/T = \pi/12$. För att få reda på a och b kan vi sätta in lösningarna för $n = 0$. Eftersom

$$\sin \omega t_0 = \sin \frac{-\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \quad \cos \omega t_0 = \cos \frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

och

$$\sin \omega t_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \omega t_1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

får vi ekvationerna

$$\begin{cases} a\frac{\sqrt{3}}{2} - b\frac{1}{2} = 2 \\ a\frac{1}{2} + b\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases}$$

Om vi multiplicerar den första ekvationen med $\sqrt{3}$ och lägger till den andra får vi

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)a = 2\sqrt{3} + 2$$

vilket ger $a = 1 + \sqrt{3}$. Om vi istället multiplicerar den andra ekvationen med $\sqrt{3}$ och drar bort den första får vi

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)b = 2\sqrt{3} - 2$$

vilket ger $b = \sqrt{3} - 1$.

Svar:

- a) De två minsta positiva lösningarna är $t = 1,37$ och $t = 3,30$, med tre gällande siffrors noggrannhet.
- b) Lösningarna ges av $t = \pi/2 + n\pi$ och $t = -\pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
- c) Konstanterna skall vara $a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{3} - 1$ och $\omega = \pi/12$.

3. a) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(t) = \sin^3 t + 3 \frac{\cos t}{\cos 3t}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

- b) Bestäm det största och minsta värde funktionen

$$g(x) = 3 \sin^3 t + 4 \cos^3 t$$

antar på intervallet $0 \leq t \leq \pi/3$. Ange svaret med tre gällande siffrors noggrannhet och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

- c) Det finns en växande deriverbar funktion $f(x)$ som är definierad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och som uppfyller

$$\sin(f(x)) = x$$

för alla $-1 \leq x \leq 1$. Använd kedjeregeln för att beräkna derivatan för $f(x)$. **(2)**

Lösning: a) För att derivata den första termen använder vi kedjeregeln. Derivatan av $\sin t$ är $\cos t$ och derivatan av t^3 är $3t^2$. Alltså är derivatan av $\sin^3 t$ lika med $3\sin^2 t \cos t$. För att derivata den andra termen använder vi kvotregeln och kedjeregeln. Vi skriver funktionen som $g(t)/h(t)$ med $g(t) = 3\cos t$ och $h(t) = \cos 3t$, vilket ger

$$\left(\frac{g(t)}{h(t)}\right)' = \frac{g'(t)h(t) - g(t)h'(t)}{h(t)^2} = \frac{(-3\sin t)\cos 3t - 3\cos t(-3\sin 3t)}{\cos^2 3t}$$

Sammantaget får vi att

$$f'(t) = 3\sin^2 t \cos t - \frac{3\sin t \cos 3t - 9\cos t \sin 3t}{\cos^2 3t}.$$

- b) För att bestämma lokala extrempunkter beräknar vi eventuella nollställen hos derivatan till funktionen. Enligt kedjeregeln får vi att

$$g'(t) = 3 \cdot (3\sin^2 t) \cos t + 4 \cdot (3\cos^2 t)(-\sin t) = 3\sin t \cos t(3\sin t - 4\cos t).$$

Derivatan är noll om någon av faktorerna är noll. I intervallet $0 \leq t \leq \pi/3$ är $\cos t \neq 0$ och $\sin t = 0$ bara för $t = 0$. Den tredje faktorn är noll om $\tan t = \sin t / \cos t = 4/3$. Detta händer en gång i intervallet $0 \leq t \leq \pi/3$, nämligen för $t = \arctan(4/3) \approx 0,927$. Värdet för funktionen i ändpunkterna ges av

$$g(0) = 3\sin^3 0 + 4\cos^3 0 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$$

och

$$g(\pi/3) = 3\sin^3(\pi/3) + 4\cos^3(\pi/3) = \frac{3(\sqrt{3})^3}{2^3} + \frac{4}{2^3} = \frac{9\sqrt{3} + 4}{8} \approx 2,45.$$

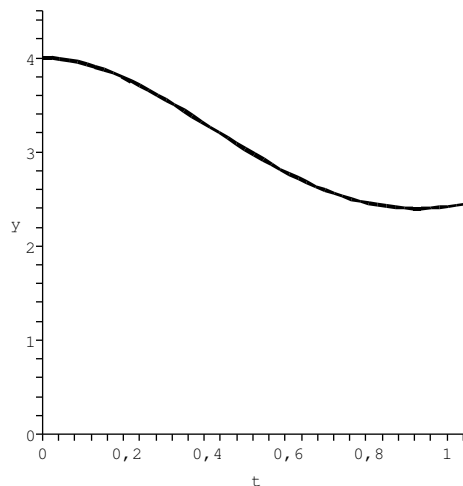
Vi jämför med värdet i $t_0 = \arctan(4/3)$ där vi får

$$\sin t_0 = \frac{4}{5} \quad \text{och} \quad \cos t_0 = \frac{3}{5}$$

om vi ser på en rätvinklig triangel med sidorna 3, 4 och 5. Alltså är

$$g(t_0) = 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{12 \cdot 16 + 12 \cdot 9}{125} = \frac{12}{5} = 2,40.$$

Eftersom $2,40 \leq 2,45 \leq 4,00$ är funktionens maximum 4,00 och dess minimum 2,40.



c) Om vi deriverar identiteten $\sin(f(x)) = x$ får vi enligt kedjeregeln

$$\cos(f(x))f'(x) = 1.$$

Eftersom $\sin^2(f(x)) + \cos^2(f(x)) = 1$ och $\sin(f(x)) = x$ får vi att

$$\cos(f(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Därmed måste

$$f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Eftersom $f(x)$ är växande måste $f'(x) \geq 0$ och därmed

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Observera att vi kan se att funktionen inte kan vara deriverbar i intervallets ändpunkter, $x = \pm 1$.

Svar:

a) $f'(t) = 3 \sin^2 t \cos t - (3 \sin t \cos 3t - 9 \cos t \sin 3t) / \cos^2 3t.$

b) Funktionens maximum är 4,00 och dess minimum är 2,40.

c) $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}.$

4. a) Beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x) dx. \quad (3)$$

- b) För att beräkna tyngdpunkten hos en balk vars tvärsnittsytta begränsas av kurvorna $y(x) = \pm f(x)$, för $a \leq x \leq b$, behöver man beräkna kvoten

$$T_x = \frac{\int_a^b f(x)x dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Beräkna T_x om $f(x) = \sin x$ för $0 \leq x \leq \pi/3$. (3)

- c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = \sin x + 2 \cos x$ roterar kring x -axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. (3)

Lösning: a) Eftersom $\sin x$ är derivatan av $-\cos x$ och $2 \cos 2x$ är derivatan av $\sin 2x$ kan vi beräkna integralen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x) dx &= \left[-\cos x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= -\cos \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} + \cos \frac{-\pi}{4} - \frac{\sin \frac{-\pi}{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-1}{2} = 1 \end{aligned}$$

- b) Vi behöver använda partiell integration för att beräkna

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/3} x \sin x dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} (-\cos x) dx \\ &= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + [\sin x]_0^{\pi/3} \\ &= -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \end{aligned}$$

För att beräkna nämnaren räcker det att beräkna integralen

$$B = \int_0^{\pi/3} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/3} = -\cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Alltså får vi i vårt fall att tyngdpunkten hamnar i

$$T_x = \frac{A}{B} = \frac{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$$

c) För att beräkna rotationskroppens volym behöver vi beräkna integralen

$$V = \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + 2 \cos x)^2 dx$$

Vi kan skriva om integranden som

$$(\sin x + 2 \cos x)^2 = \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x$$

och med formlerna för dubbla vinkeln blir detta

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + 2 \sin 2x + 4 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{5}{2} + 2 \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x.$$

Vi kan nu beräkna integralen som

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{5}{2} + 2 \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{5x}{2} - \cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \pi \left(\frac{5\pi}{8} - 0 + \frac{3}{4} - \frac{-5\pi}{8} + 0 - \frac{3}{4}(-1) \right) = \frac{5\pi^2}{4} + \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Svar:

- a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x) dx = 1.$
- b) Vi får $T_x = (3\sqrt{3} - \pi)/3.$
- c) Rotationskroppens volym är $5\pi^2/4 + 3\pi/2$ volymsenheter.