

# 5B1134 Matematik och modeller

2006-09-04

## 1 Första veckan — Geometri med trigonometri

### Veckans begrepp

- cirkel, cirkelsegment, sektor, korda, båglängd, vinkel, grader, radianer, sinus, cosinus, tangens, areasatsen, sinussatsen, cosinussatsen

### Frågor att besvara

- Vad är en linje, en cirkel, en sektor, ett segment och en korda?
- Vad är en vinkel och hur jämför man vinklar?
- Hur bestämmer man arean av en cirkelsektor eller ett cirkelsegment?
- Hur kan vi definiera sinus, cosinus och tangens med hjälp av rätvinkliga trianglar eller enhetscirkeln?
- Hur får vi reda på vinkeln om vi känner till sinus eller cosinus för vinkeln? Behöver vi veta något mer?
- Hur bestämmer man en sidlängd eller en vinkel i en triangel om man vet två sidlängder och en vinkel, en sidlängd och två vinklar eller tre sidlängder?

### Problem att arbeta med

Här följer en uppsättning uppgifter som har med första veckans material att göra. Några av uppgifterna är svåra, eller mycket svåra, och det är inte tänkt att man skall kunna lösa uppgifterna på egen hand. Det är i stället meningen att studenterna med hjälp av varandra och läraren skall kunna arbeta med problemen och på det viset lära sig något om geometri och trigonometri.

**Övning 1.1** Bestäm längden av kordan som ges av skärningen mellan linjen  $x + y = 1/2$  och enhetscirkeln.

**Övning 1.2** Betrakta de punkter  $(x, y)$  som uppfyller olikheterna

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq 1. \end{cases}$$

- Rita upp området och avgör vad det är för typ av område.
- Bestäm arean av området.
- Ersätt den andra olikheten med  $x + y \geq 2$  och bestäm arean av området.
- Ersätt den andra olikheten med  $y \geq c$  och bestäm hur arean av området,  $A$ , beror på  $c$ . Skissera grafen för  $A(c)$ .

**Övning 1.3** Betrakta området i planet som beskrivs av olikheterna

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ x \geq 0, \\ y \geq x. \end{cases}$$

- Rita upp området och visa att det är en sektor.
- Bestäm öppningsvinkeln, arean och båglängden för sektorn.
- Hur varierar arean av sektorn med  $c$  om den sista olikheten ersätts med  $y \geq cx$ ?

**Övning 1.4** En triangel har två sidor av längd  $a$  och en sida av längd  $b$ . Uttryck sinus och cosinus för alla vinklar i triangeln med hjälp av  $a$  och  $b$ . Förenkla uttrycken så långt som möjligt. Vad händer om vi skriver  $a = m^2 + n^2$  och  $b = 4mn$ ?

**Övning 1.5** En tetraeder är en tredimensionell kropp med fyra triangelformade sidor. I en regelbunden tetraeder är alla fyra sidor liksidiga trianglar och tyngdpunkten i tetraedern har då samma avstånd till alla fyra hörn.

- Hur långt är det avståndet i förhållande till kanternas längd?
- Om man står i tyngdpunkten och ser mot två olika hörn. Vilken är då vinkeln mellan dessa?
- Hur långa skall tetraedernas sidor vara för att den skall rymma en liter?

**Övning 1.6** Longitud och latitud ger koordinater på jordytan som kan tänkas som en sfär med omkretsen 40000km vid ekvatorn. Hur stort är avståndet mellan Stockholm och Göteborg? Koordinaterna är  $(59, 2^\circ N, 17, 6^\circ O)$  respektive  $(57, 4^\circ N, 12, 2^\circ O)$ .

**Övning 1.7** En triangelformad plåtbit med måtten 15 cm, 20cm och 30cm hålls upp mot solen som lyser klar över Stockholm. Det är mitt på dagen på midsommarafton.

- Hur stor kan arean av skuggan av plåtbiten på marken bli?
- Hur stor kan den bli tre timmar senare?

(Jordaxelns lutning är  $c:a$   $23^\circ$ .)

**Övning 1.8** Bestäm ett uttryck för arean av en triangel med hörn i punkterna  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  och  $(a_3, b_3)$ .

## Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina.

**Övning 1.9** Rita upp triangeln  $ABC$  med  $A = (1, 3)$ ,  $B = (2, 4)$  och  $C = (5, 1)$ .

- Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. (4)
- Avgör vilken av vinklarna som är störst. (2)
- Låt  $C$  röra sig efter linjen  $x = 5$  och bestäm ett villkor på  $C$  för att vinkeln  $B$  skall vara den största i triangeln. (3)

**Övning 1.10** Rita upp triangeln  $ABC$  med  $A = (1, 2)$ ,  $B = (3, 5)$  och  $C = (5, 1)$ .

- Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen. (Ledning: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.) (4)
- En av vinklarna är nästan precis  $60^\circ$ . Vilken är det, och är den större eller mindre än  $60^\circ$ ? (2)
- Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna  $y = kx$  och  $y = \ell x$ , där  $k \geq 0$  och  $\ell \geq 0$ . (3)

**Övning 1.11** a) I en triangel  $ABC$  är sidan  $c = |AB| = 5,1$  cm och sidan  $a = |BC| = 6,7$  cm. Vinkeln vid  $A$  är  $\alpha = 68^\circ$ . Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna. (4)

- Two circles intersect at two points which are at a distance  $\sqrt{2}$  from each other. The radii of the circles are 1 and  $\sqrt{2}$ . Determine the area of the region which lies inside both circles. (5)

**Övning 1.12** a) En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln. (5)

- Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area? (4)

**Övning 1.13** a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm. (4)

- Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand? (3)

- c) Hur lång omkrets har en regelbunden  $n$ -hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på? (2)

**Övning 1.14** I triangeln  $ABC$  har sidan  $AB$  längd 7, sidan  $BC$  längd 5 och  $\cos B = 1/7$ .

- a) Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna. (5)
- b) Låt  $S$  vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln  $ASB$  är dubbelt så stor som vinkeln  $C$  enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är  $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1$ . Använd detta för att bestämma cirkelns radie. (4)

**Övning 1.15** En triangulär tomt har måtten 35 m, 48 m och 50 m.

- a) Beräkna närmevärden för vinklarna vid alla tre hörnen med två gällande siffror. (4)
- b) Beräkna ett närmevärde med två gällande siffror för tomtens area. (2)
- c) En familj som köpt den obebyggda tomten vill söka bygglov för ett hus som är format som en reguljär pentagon, dvs en femhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är lika stora. Man kan räkna med att få bygglov för ett hus med bottenarea som upptar högst 10 % av tomtarean. Hur långa kan husets väggar i så fall vara? (3)

**Övning 1.16** Två av sidlängderna i en triangel är 8 m och 13 m. En av vinklarna är  $60^\circ$ .

- a) Bestäm alla möjliga värden för den tredje sidans längd. (4)
- b) Hur stor kan triangelns area maximalt vara? (3)
- c) I en rätvinklig triangel delar en linje den räta vinkeln i två vinklar som är  $30^\circ$ , respektive  $60^\circ$ . Linjen delar hypotenusan i två längder som är 8 cm respektive 2 cm. Hur långa är kateterna i triangeln? (2)

**Övning 1.17** I triangeln  $ABC$  är vinklarna  $A = 42^\circ$ ,  $B = 63^\circ$  och  $C = 75^\circ$ .

- a) Bestäm hur långa de övriga sidor är ifall den kortaste sidan har längd 15 m. Ange sidlängderna med två gällande siffrors noggrannhet. (3)
- b) Bestäm alla tre sidlängder med två gällande siffrors noggrannhet ifall arean av triangeln är  $1000 \text{ m}^2$ . (4)
- c) Härled cosinussatsen med hjälp av Pythagoras sats genom att dra en höjd mot en av sidorna. (2)

**Övning 1.18** a) I en triangel är två av sidlängderna 7 respektive 8 längdenheter och vinkeln mellan dessa sidor är  $120^\circ$ . Bestäm den tredje sidans längd och triangelns area. (3)

b) Bestäm sidlängderna i en triangel där vinklarna är  $34^\circ$ ,  $57^\circ$  och  $89^\circ$  och triangelns area är  $44 \text{ cm}^2$ . Ange svaren med två värdesiffror. (3)

c) Två tangenter till en cirkel med radie  $r$  möts vid en vinkel av  $45^\circ$ . Hur stor är arean av det område som ligger mellan tangenterna och cirkeln? (3)

**Övning 1.19** a) Om två av sidorna i en triangel är 5 meter respektive 6 meter. Vilka längder på den tredje sidans längd ger upphov till en triangel med en area på minst 9 kvadratmeter. (5)

b) Jämför arean av en regelbunden oktagon med sida  $1/\sqrt{2}$  med en regelbunden hexagon med sida 1. Vilken är störst? (4)

**Övning 1.20** a) I en spetsvinklig<sup>1</sup> triangel är två av sidorna 8,6 meter och 9,7 meter. Arean är 32 kvadratmeter. Hur stora är vinklarna och hur lång är den tredje sidan? Ange svaren med två gällande siffrors noggrannhet. (5)

b) Två cirklar med samma radie  $r$  har sina medelpunkter på varandras periferi. Hur stor är arean av det område som cirkelarna bildar tillsammans? Ange svaret med ett exakt värde. (4)

**Övning 1.21** a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 4,2 cm, 6,3 cm och 7,8 cm. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. (3)

b) Bestäm arean av en triangel med sidlängderna 4,0 cm, 5,2 cm och 6,5 cm. Ange svaret som närmevärde med två gällande siffror. (2)

c) Beräkna arean av ett cirkelsegment med sidan 8,4 cm och höjden 2,3 cm. Ange svaret som ett närmevärde med två gällande siffror. (4)

**Övning 1.22** a) Bestäm sidlängderna i en triangel med vinklarna  $44^\circ$ ,  $63^\circ$  och  $73^\circ$  om arean av triangeln är  $64 \text{ cm}^2$ . Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. (5)

b) Härled areasatsen och sinussatsen. (4)

---

<sup>1</sup>alla vinklar är mindre än  $90^\circ$  ( $\pi/2$  radianer)

## Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

- 1.9** a)  $\cos \alpha = 1/\sqrt{10}$ ,  $\cos \beta = 0$  och  $\cos \gamma = 3/\sqrt{10}$ .
- b) Vinkeln vid  $B$  är störst.
- c) Vinkeln vid  $B$  är störst om  $C$  ligger ovanför  $x$ -axeln.
- 1.10** a)  $\sin \alpha = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$ ,  $\sin \beta = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$  och  $\sin \gamma = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$ .
- b) Vinkeln  $\beta$  ligger nära  $60^\circ$ , men är lite större än  $60^\circ$ .
- c) Cosinus för vinkeln mellan linjerna ges av  $(1 + k\ell)/(\sqrt{1 + k^2}\sqrt{1 + \ell^2})$ .
- 1.11** a) Den tredje sidan är  $6,7$  cm och vinklarna är  $\beta \approx 67^\circ$  och  $\gamma \approx 45^\circ$ .
- b) Arean av området som ligger i bägge cirkelarna är  $7\pi/12 - (\sqrt{3} + 1)/2 \approx 0,467\text{cm}^2$ .
- 1.12** a) Vinklarna är  $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41^\circ$ ,  $\beta = \arccos(9/16) \approx 56^\circ$ ,  $\gamma = \arccos(1/8) \approx 83^\circ$  och triangelns area är  $15\sqrt{7}/4 \approx 9,9$  kvadratcentimeter.
- b) Förhållandet mellan areorna är  $2\pi/\sqrt{3} - 2 \approx 1,63$ .
- 1.13** a) Vinklarna är  $\alpha = \arccos(337/442) \approx 40,3^\circ$ ,  $\beta = \arccos(241/374) \approx 49,9^\circ$  och  $\gamma = \arccos(1/286) \approx 89,8^\circ$ .
- b) Andelen av arean är  $3\sqrt{3}/2\pi \approx 0,83$ .
- c) Kvoten mellan omkretsarna är  $(n/\pi) \sin \pi/n$ .
- 1.14** a) Den tredje sidans längd är  $b = 8$  och cosinus för de övriga vinklarna är  $\cos A = 11/14$  och  $\cos C = 1/2$ .
- b) Radien för cirkeln är  $R = 7/\sqrt{3}$ .
- 1.15** a) Vinklarna är  $A \approx 42^\circ$ ,  $B \approx 66^\circ$  och  $C \approx 72^\circ$ .
- b) Tomtens area är  $800\text{ m}^2$ .
- c) Husets väggar kan vara högst  $6,8$  m.  
Alla svar är angivna med två gällande siffrors noggrannhet.
- 1.16** a) Den tredje sidan kan vara  $c = 15$  m eller  $c = \sqrt{129}$  m.
- b) Arean av triangeln kan maximalt vara  $30\sqrt{3}$  areaenheter.
- c) Kateternas längder är  $a = 40\sqrt{3}/7$  cm och  $b = 10/7$  cm.
- 1.17** a) De övriga sidorna är  $20$  m respektive  $22$  m.
- b) Sidlängderna är  $39$  m,  $53$  m och  $57$  m.
- 1.18** a) Den tredje sidans längd är  $13$  och arean är  $14\sqrt{3}$ .
- b) Sidlängderna är  $7,7$  cm,  $11$  cm och  $14$  cm.
- c) Arean av området är  $(1 + \sqrt{2} - 3\pi/8)r^2$ .
- 1.19** a) Den tredje sidans längd kan variera mellan  $\sqrt{13}$  och  $\sqrt{109}$  för att arean skall vara minst  $9$  kvadratmeter.
- b) Hexagonens area är  $3\sqrt{3}/2 \approx 2,6$  areaenheter medan oktagonens bara är  $1 + \sqrt{2} \approx 2,4$  areaenheter.
- 1.20** a) Den tredje sidans längd är  $7,8$  meter och vinklarna är  $50^\circ$ ,  $58^\circ$  och  $72^\circ$ . ( $0,87$ ,  $1,0$  och  $1,3$  radianer.)
- b) Figurens area är  $(8\pi + 3\sqrt{3})r^2/6$ .
- 1.21** a) Vinklarna är  $\alpha \approx 32^\circ$ ,  $\beta \approx 54^\circ$  och  $\gamma \approx 94^\circ$ .
- b) Arean är  $10$  kvadratcentimeter.
- c) Aran av cirkelsegmentet är  $14\text{ cm}^2$ .
- 1.22** a) Sidlängderna är  $10$  cm,  $13$  cm och  $14$  cm, med två gällande siffrors noggrannhet.