5B1134 Matematik och modeller

1 oktober 2006

4 Fjärde veckan — Derivator med tillämpningar

Veckans begrepp

- optimering, extrempunkter, lokala maxima och minima
- Newton-Raphsons metod för numerisk ekvationslösning
- feluppskattning med hjälp av derivata
- primitiva funktioner

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 4.1 *Låt $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vara den funktion som ges av $f(x) = (2\cos x + 1)^4$, för alla reella tal x.*

a) *Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera f.* **(3)**

b) *Bestäm maximum och minimum för funktionen f på intervallet $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$.* **(4)**

c) *Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till $h = g^n$ då $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ är en given funktion och n är ett positivt heltal.* **(2)**

Övning 4.2 *Betrakta funktionen*

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

a) *Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av $f(x)$. Förenkla uttrycket så långt som möjligt.* **(3)**

b) *Skissera grafen för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ och bestäm maximum och minimum av $f(x)$ på samma intervall.* **(4)**

c) *Funktionen $y = f(x)$ är lösningen till en* differentialekvation

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a och b. **(2)**

Övning 4.3 *Betrakta funktionen $f(x) = \sin x + 2\cos^2 x$.*

a) *Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$.* **(3)**

b) *Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \le x \le 2\pi$ med två gällande siffror.* **(4)**

c) *Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$.* **(2)**

Övning 4.4 *Betrakta funktionen $f(x) = x(3-x)e^{-x/2}$.*

a) *Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används.* **(4)**

b) *Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \le x \le 10$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall.* **(5)**

Övning 4.5 *Betrakta funktionen $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.*

a) *Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används.* **(4)**

b) *Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $-1 \le x \le 1$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall.* **(5)**

Övning 4.6

a) *Derivera funktionen $f(x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.)* **(2)**

b) *Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$.* **(2)**

c) *Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax}\sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$.* **(5)**

Övning 4.7

a) *Derivera funktionen*

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) *Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen*

$$g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. *Skissera också grafen för funktionen på samma intervall.* **(4)**

c) *Härled derivatan av* $\tan x$ *direkt från definitionen av derivata. (Ledning: Använd att* $(\sin x)/x$ *går mot* 1 *när* x *går mot noll.)* **(2)**

Övning 4.8

a) *Derivera funktionen*

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) *Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen*

$$g(x) = \frac{2 + x}{5 + x^2}$$

på intervallet $-5 \leq x \leq 5$. *Skissera också grafen för funktionen på samma intervall.* **(4)**

c) *Visa direkt från definitionen av derivata att en exponentialfunktion,* $h(x)$, *uppfyller*

$$h'(x) = h(x)\frac{h'(0)}{h(0)}.$$

(2)

Övning 4.9

a) *Beräkna derivatan av funktionen*

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}\cos(x)}$$

som är definierad för $x \geq 0$. *Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används.* **(3)**

b) *Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde till nollstället till funktionen* $f(x) = \sin(x) + x - 1$. *Utför två iterationer med startvärde* $x = 0$. *och ange nollstället med korrekt antal gällande siffror.* **(4)**

c) *Härled formeln för derivatan av en produkt av två deriverbara funktioner.* **(2)**

Övning 4.10

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \ln x \sin^2 x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{2x^2 + 8}{2x + 3}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 3$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Om man behöver beräkna $\sqrt{57}$ med en miniräknare som saknar kvadratrotsfunktion kan man använda Newton-Raphsons metod. Använd den för att beräkna ett närmevärde med tre gällande siffrors noggrannhet utgående från startvärdet $x_0 = 7$. **(2)**

Övning 4.11

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

och ange tydligt vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

på intervallet $-2 \leq x \leq 2$. Ange svaren exakt. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att beräkna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$4 \sin x = x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Gör två iterationer från startvärdet $x_0 = \pi$. **(2)**

Övning 4.12

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \cos(x)$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att enge vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) *Bestäm maximum och minimum för funktionen*

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3x^2\sqrt{x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 1$*. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall.* **(4)**

c) *För att bestämma maximum för funktionen* $h(x) = e^{-at}\sin(\omega t)$ *för* $t > 0$ *vill man hitta det första nollstället för derivatan,* $h'(x)$*. En första gissning är* $t = \pi/2\omega$*, eftersom sinusfunktionen har sitt maxmimum i den punkten. Använd Newton-Raphsons metod för att förbättra denna gissning.* **(2)**

Övning 4.13

a) *Beräkna derivatan av funktionen*

$$f(x) = (1 + \sin^2 x)(2 + \cos^2 x)$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. Förenkla uttrycket så långt det går **(4)**

b) *Bestäm maximum och minimum för funktionen*

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$*. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall.* **(5)**

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

4.1

a) $f'(x) = -4\sin x(\cos x + 1)^3$.

b) *Maximum är* 1 *och minimum är* 0.

c) *Genom att se på nollställena till* $g'(x)$ *och* $g(x)$, *samt ändpunkterna på intervallet.*

4.2

a) $f'(x) = 2e^{-x}\cos x$.

b) *Maximum är* $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0,21$ *och minimum är* $f(0) = -1$.

c) *Konstanterna ges av* $a = b = 2$ *och* $y = f(x)$ *är en lösning till* $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4.3

a) *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = \cos x - 4\cos x \sin x$.

b) *Maximum av* $f(x)$ *är* $2,1$ *och minimum* $-1,0$, *på intervallet* $0 \le x \le 2\pi$.

c) *De exakta värdena för maximum och minimum är* $17/8$, *respektive* -1.

4.4

a) *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = (6 - 7x + x^2)e^{-x/2}/2$.

b) *Maximum av* $f(x)$ *är* $2e^{-1/2} \approx 1,2$ *och minimum är* $-18e^{-3} \approx -0,90$.

4.5

a) *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = (2x^2 - 1)e^{2x}$.

b) *Maximum av* $f(x)$ *är* $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0,29$ *och minimum är* $\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -0,85$.

4.6

a) *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = -32\cos^3 x \sin x + 16\cos x \sin x$.

b) *Derivatan av* $g(x)$ *är* $g'(x) = -2\sin 2x \sin 3x + 3\cos 2x \cos 3x$.

c) *Funktionen har ett lokalt maximum i punkten* $x = \pi/3$ *om* $a = -2\sqrt{3}$.

4.7

a) *Derivatan är* $f'(x) = 8/(e^{2x} + e^{-2x})^2$.

b) *Det största värdet är* $\sqrt{3}/3$ *och det minsta är* $-\sqrt{3}/3$.

c) *Dervatan av* $\tan(x)$ *är* $1/\cos^2(x)$.

4.8

a) *Derivatan är* $f'(x) = 2/(1 + \sin 2x)$.

b) *Det största värdet är* $1/2$ *och det minsta värdet är* $-1/10$.

4.9

a) *Derivatan är* $f'(x) = (2\cos x + \sin x)/(2\sqrt{1 - e^{-2x}\cos x})$.

b) *Nollstället är* $x = 0,51$ *med två gällande siffrors noggrannhet.*

4.10

a) $f'(x) = (1/x)\sin^2 x + 2\ln x \sin x \cos x$.

b) *Maximum ges av* $g(3) = 26/9$ *och minimum av* $g(1) = 2$.

c) $x = 7,55$ *är en approximation av* $\sqrt{57}$ *med tre gällande siffror.*

4.11

a) $f'(x) = (1/x)\sin^2 x + 2\ln x \sin x \cos x$.

b) *Maximum ges av* $g(3) = 26/9$ *och minimum av* $g(1) = 2$.

c) $x = 7,55$ *är en approximation av* $\sqrt{57}$ *med tre gällande siffror.*

4.12

a) $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$.

b) Maximum är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ *och minimum* $f(-1) = -1/\sqrt{e}$.

c) Två steg med Newton-Raphsons metod ger närmevärdet $x = 2,47$ *(med tre gällande siffror).*

4.13

a) $f'(x) = -e^{-\sqrt{x}}(\cos x/(2\sqrt{x}) + \sin x)$.

b) Maximum är $g(2/5) = 8\sqrt{10}/125$ *och minimum är* $g(1) = -1$.

c) Den förbättrade gissningen är $t_1 = \pi/(2\omega) + a/(a^2 - \omega^2)$.

4.14

a) $f'(x) = 4 \sin x \cos^3 x$.

b) Maximum är $f(2) = 5/3 \approx 1,67$ *och minimum* $f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,83$.