

5B1134 Matematik och modeller

2 oktober 2006

5 Femte veckan — Integraler med tillämpningar

Veckans begrepp

- Primitiva funktioner, integraler, area
- Trapetsmetoden för numerisk integration
- Partiell integration
- Variabelbyte i integraler
- Rotationsvolym

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 5.1 [5B1134:Modelltentamen:4]

- a) Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = 1/2$ på intervallet $[0, 2\pi]$. (4)
- b) Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen $g(x) = 1/2$ mot $g(x) = \cos a$, där a är en konstant med $0 \leq a \leq \pi$. (3)
- c) Vilka värden på a ger den största, respektive minsta arean mellan graferna? (2)

Övning 5.2 [5B1134:KS:4:2003]

- a) Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \sin 2x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$. (4)
- b) Kurvan $y = x(1 - x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x -axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp. (3)

- c) När ett område ovanför x -axeln roteras kring x -axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi r A$ där A är arean under grafen som roteras och r är avståndet från områdets tyngdpunkt till x -axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över x -axeln för det område som roteras i b). (2)

Övning 5.3 [5B1134:Tentamen:031013:4]

- a) Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ roteras kring x -axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$. (3)

- b) Använd partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx. \quad (4)$$

- c) Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2 - x^2$. (Ledning: $2/3x\sqrt{x}$ är en primitiv funktion till \sqrt{x} .) (2)

Övning 5.4 [5B1134:Tentamen:031103:4]

- a) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos 2x| dx. \quad (4)$$

- b) Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx. \quad (5)$$

Övning 5.5 [5B1134:Tentamen:040109:4]

- a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. (4)

- b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx$$

med hjälp av partiell integration. (3)

- c) Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift. (2)

Övning 5.6 [5B1134:Tentamen:040821:4]

a) Beräkna integralen

$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$

där $f(x) = e^x - 1$ för alla reella x . (3)

b) Beräkna integralen

$$\int_0^1 (1 - x^2)e^x dx$$

med hjälp av partiell integration. (3)

c) Låt $g(t)$ vara en periodisk funktion med period T och låt a vara en reell konstant. Visa att

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at} f(t) dt = K \int_0^T e^{at} f(t) dt$$

för någon konstant K och bestäm denna konstant. (3)**Övning 5.7 [5B1134:KS4:2004]**a) Polynomet $p(x) = 1 - 2x^2$ är en approximation av $\cos 2x$ som är bra för små värden på x . Beräkna integralerna

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx \quad \text{och} \quad \int_0^{\pi/4} p(x) dx$$

och jämför resultaten. Hur stort blir det fel man får genom att använda approximationen? (4)

b) Bestäm hur stort felet blir när man använder trapetsmetoden med tre delintervall för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx.$$

(2)

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området under grafen för $f(x) = \ln(x) + 1$ roterar kring x -axeln på intervallet $1 \leq x \leq e$. (3)**Övning 5.8 [5B1134:Tentamen:041011:4]**a) Kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-2x}$ avgränsar tillsammans med linjen $x = \ln(2)$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. (3)

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx.$$

med hjälp av variabelbyte. (3)

c) Bestäm det värde på konstanten a som minimerar

$$\int_0^\pi (ax - \sin x)^2 dx.$$

(3)

Övning 5.9 [5B1134:Tentamen:041030:4]

a) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av parabeln $y = 4 - x^2$ och linjen $y = 1 + 2x$. (3)

b) Använd variabelbytet $x = \tan t$ för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

(3)

c) Beräkna arean mellan de två kurvorna $y = \sin(x+a)$ och $y = \sin(x+b)$ på ett intervall som ligger mellan två närliggande skärningspunkter. (3)

Övning 5.10 [5B1134:Tentamen:050112:4]

a) Kurvan $f(x) = \sin(x)$ avgränsar tillsammans med dess tangenter i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. (4)

b) Samma område roterar kring x -axeln. Beräkna volymen av den rotations kropp som bildas. (3)

c) Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

med hjälp av ett variabelbyte.

(2)

Övning 5.11 [5B1134:Tentamen:050829:4]

a) Använd en integral för att beräkna arean av området mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x + 3$. (3)

b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \sin 2x$ genom att använda partiell integration. (3)

c) Bestäm volymen av den rotations kropp som bildas när kurvan $y = \tan x$ roterar kring x -axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. (3)

Övning 5.12 [5B1134:KS4:2005]

a) Beräkna arean av området som begränsas av de två kurvorna $y = x$ och $y = x^3$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. (3)

b) Använd trapetsmetoden för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Använd fyra delintervall och ange svaret med två decimaler. (3)

c) Använd variabelbytet $t = x^2$ för att beräkna ett exakt värde för integralen

$$\int_0^2 x e^{-x^2/2} dx.$$

(3)

Övning 5.13 [5B1134:Tentamen:051017:4]

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = 2x^2 + x - 5$ och $y = x^2 + x - 1$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$. (3)

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx.$$

(2)

c) Beräkna volymen av den rotations kropp som bildas när kurvan

$$y = \sqrt{x} \cos x$$

roterar kring x -axeln på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (Ledning: Använd partiell integration och formeln för cosinus av dubbla vinkeln.) (4)

Övning 5.14 [5B1134:Tentamen:060113:4]

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = \sin^2 x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (Ledning: $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.) (3)

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx.$$

med hjälp av partiell integration. (3)

c) Använd trapetsmetoden med tre delintervall för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

(3)

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

5.1

- a) Areal mellan graferna är $\pi/3 + 2\sqrt{3}$.
- b) Uttrycket för arean är $(2\pi - 4a) \cos a + 4 \sin a$.
- c) Maximum är 2π och minimum är 4.

5.2

- a) Areal av området mellan graferna är $1/2$.
- b) Rotationskroppens volym är $\pi/30$.
- c) Avståndet från områdets tyngdpunkt till x -axeln är $1/10$.

5.3

- a) Volymen är $23\pi/24$.
- b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.
- c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2} dx = 2\sqrt{2}/3$.

5.4

- a) $\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x| dx = 3\sqrt{3} - 2$.
- b) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \approx 0,19..$

5.5

- a) Areal mellan kurvorna ges av $(e^2 + 1)(e - 1)^2/2e^2 \approx 1,68$.
- b) $\int_0^\pi x \sin x dx = \pi$.
- c) Trapetsmetoden ger $\pi^2(\sqrt{2} + 1)/8 \approx 2,98$.

5.6

- a) $\int_0^2 f(x)^2 dx = (e^4 - 4e^2 + 7)/2$.
- b) $\int_0^1 (1 - x^2)e^x dx = 1$.
- c) Konstanten är $K = e^{anT}$.

5.7

- a) Integralernas värden blir $1/2$, respektive $\pi(24 - \pi^2)/96$ och felet man får genom att använda approximationen är $(24\pi - \pi^3 - 48)/96 \approx -0,038$.
- b) Felet man får genom att använda trapetsmetoden blir $(\pi(2 + \sqrt{3}) - 12)/24 \approx -0,011$.
- c) Rotationskroppens volym är $V = \pi(2e - 1) \approx 13,9$ volymsenheter.

5.8

- a) Areal av området är $9/8$ areaenheter.
- b) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = \ln(3)$
- c) Värdet på a som minimerar integralen är $a = 3/\pi^2$.

5.9

- a) Areal av området är $32/3$ areaenheter.
- b) Integralens värde är $\pi/4$.
- c) Areal av området är $4|\sin((a-b)/2)| (= 2\sqrt{2 - 2\cos(a-b)})$.

5.10

- a) Areal är $(\pi^2 - 8)/4$.
- b) Volymen är $\pi^2(\pi^2 - 6)/12$.
- c) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2 - 2 \ln 2$.

5.11

- a) Areal mellan kurvorna är $32/3$ areaenheter.
- b) $(1/4 - x^2/2) \cos 2x + (x/2) \sin 2x$ är en primitiv funktion till $x^2 \sin 2x$.
- c) Rotationsvolymen är $2\pi - \pi^2/2 (\approx 1,35)$ volymsenheter.

5.12

- a) Areal av det området mellan kurvorna är $1/2$ (areaenheter).

b) Uppskattningen med trapetsmetoden ger 0,16.

c) $\int_0^2 x e^{-x^2/2} dx = 1 - e^{-2}$.

5.13

a) Areal mellan kurvorna är $23/3$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx = 4/3$.

c) Volymen av rotationskroppen är $\pi^3/4$ volymenheter.

5.14

a) Areal mellan graferna är $2 - \pi/2$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx = \pi - 2$.

c) En approximation med tre delintervall ger 1,2.