5.5 Beräkning av gränsvärden

Ex $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \left[\begin{array}{l} x = 1+t \\ x\to 1 \Rightarrow t\to 0 \end{array} \right]$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t+O(t^2)}{1+t^2+2t-1} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t+O(t^2)}{t^2+2t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\left(1+\frac{O(t^2)}{t}\right)}{t(t+2)} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{1+O(t)}{t+2} = \frac{1}{2}$

Cauchy's medelvärdessats

1) $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på $a<x<b$
2) $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga i a och b
3) $g'(x) \neq 0$ på $[a,b]$.

Då finns ett tal c sådant att

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

<u>Bevis</u> Låt $F(t) = f(t) - f(a) - A\big(g(t) - g(a)\big)$

där $A = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Longrightarrow F(a) = F(b) = 0$

$F'(t) = f'(t) - Ag'(t)$

Rolles sats ger att det finns ett tal c, $a \leq c \leq b$ så att

$$F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - Ag'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = Ag'(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \text{Vsb}$$

l'Hospitals regel

1. $f'(x)$ och $g'(x)$ existerar och $g'(x) \neq 0$ i en omgivning av a
2. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ är av typ "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"
3. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

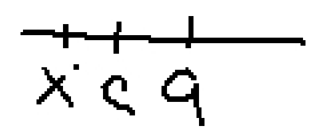
Bevis I "$\frac{0}{0}$" a reellt

$$f(a) = g(a) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ för något tal c mellan a och x (Cauchys medelvärdessats)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$x \to a \Rightarrow c \to a$$



II "$\frac{0}{0}$" $a = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \\ x \to \infty \Rightarrow t \to 0 \end{array}\right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \left[t = \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$ $\left[\frac{"0"}{0}\right]$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \underline{\frac{1}{2}}$

5.6 Asymptoter

Def. Linjen $x=c$ är en <u>lodrät asymptot</u> till $y=f(x)$ om $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ eller $-\infty$

eller c^-

Linjen $y=ax+b$ är en <u>sned asymptot</u> till $y=f(x)$ om $a=\lim_{x\to\infty\,(-\infty)} \frac{f(x)}{x}$ och $b=\lim_{x\to\infty\,(-\infty)} (f(x)-ax)$

Ex Bestäm lodräta och sneda asymptoter till

$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ $\quad x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$

$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$

$x=1$ är en lodrät asymptot

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x})}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1$

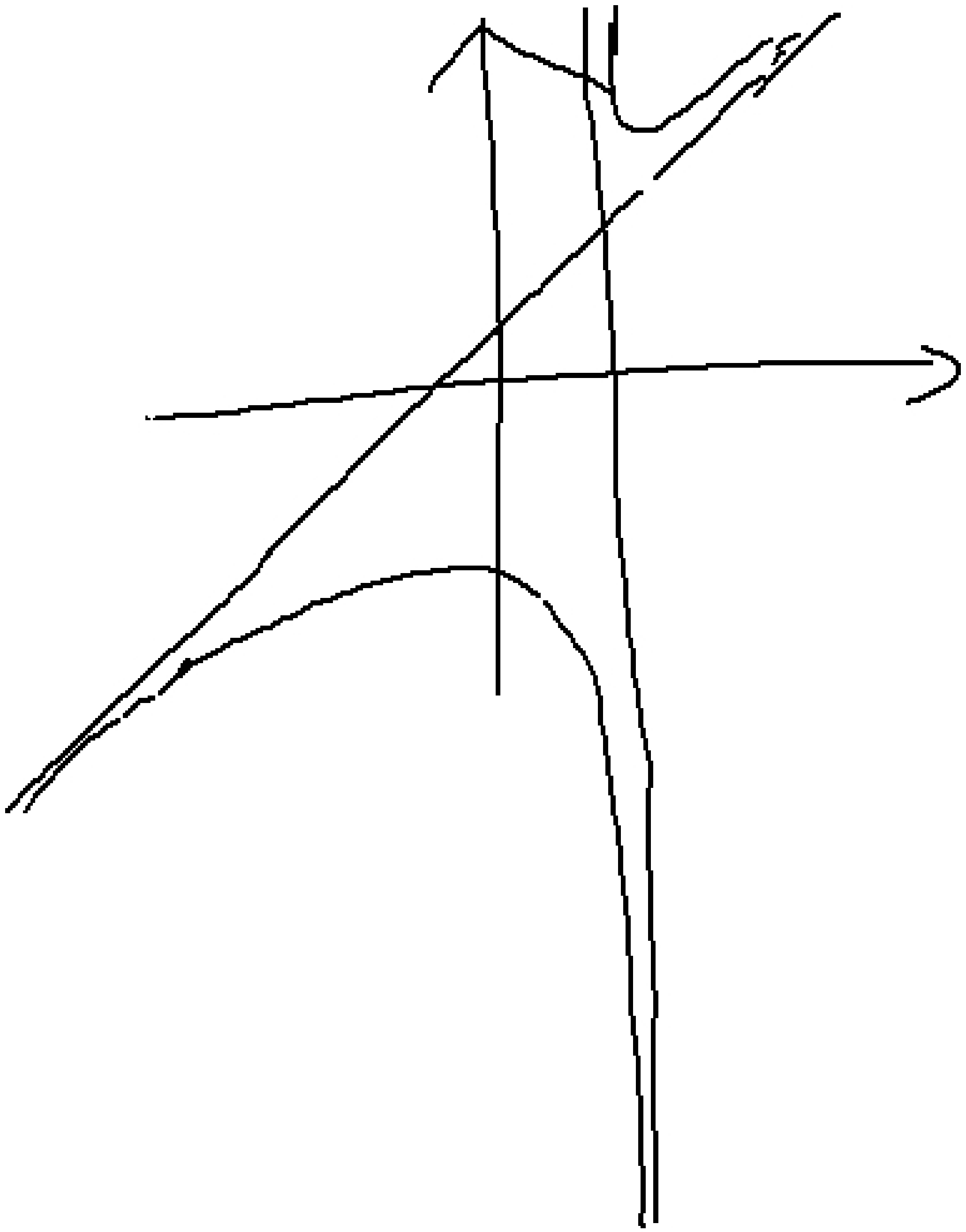
$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 1 \cdot x) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to \infty \\ -\infty}} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \lim_{\substack{x \to \infty \\ -\infty}} \frac{x+1}{x-1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to \infty \\ -\infty}} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{\substack{x \to \infty \\ -\infty}} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

Sned asymptot är $y = x + 1$



6. Differentialekvationer, DE

DE är samband mellan en funktion och dess derivator.

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ är konstanter

$L(y)$ är en <u>linjär DE med konstanta koefficienter</u>

<u>Ex</u> $y'' - y^2 = 0$ Ej linjär

$y'' + xy' = 0$ Ej konstanta koefficienter

Om $g(x) = 0$ kallas $L(y)$ en
<u>homogen</u> DE. Annars <u>inhomogen</u>
En <u>lösning</u> till en DE är en funktion
$f(x)$ som satisfierar ekvationen.
<u>Allmänna lösningen</u> är alla funktioner som
satisfierar DE.
Andra ordningens homogen DE:

$$y'' + ay' + by = 0$$

Sök lösningar på formen $y = e^{rx}$

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx} \implies$$

$r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0 \Longleftrightarrow$

$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$

$e^{rx} \neq 0 \Longrightarrow \underline{r^2 + ar + b} = 0$ kallas karakteristiska ekvationen

Lösningar till $y'' + ay' + by = 0$ är på formen $y = e^{rx}$ där r är rot till karakteristiska ekvation.

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ har lösning en $y = e^{rx} \Longleftrightarrow r$ är en rot till

$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$

Superpositionsprincipen

Om $y_1(x), \dots, y_n(x)$ är lösningar till den homogena DE L så är också $y = A_1 y_1(x) + \dots + A_n y_n(x)$ lösningar till L för alla reella tal $A_1, \dots, A_n$.

Sats Den allmänna lösningen till L av ordning n kan skrivas $y = A_1 y_1(x) + \dots + A_n y_n(x)$ där $A_1, \dots, A_n$ är konstanter och $y_1, \dots, y_n$ är lösningar sådana att

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \neq 0$ för alla $c_1, \dots, c_n$

(y_1, y_2, y_n är linjärt oberoende lösningar)

Ex $y_1 = x$, $y_2 = 2x$ är linjärt beroende ty $2y_1 - y_2 = 0$.

$y'' + ay' + by = 0$

rötter	Allmänna lösningen
$r_1 \neq r_2$ reella	$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$r = r_1 = r_2$ –"–	$y = e^{rx}(A + Bx)$
$r = a \pm bi$ (a, b reella)	$y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$

Ex | $y'' + y' - 2y = 0$

Kar. ekv: $r^2 + r - 2 = 0 \iff r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$

$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -2$

Ex $y'' + 2y' + y = 0$

Kar. ekv: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 \quad \text{(dubbelrot)}$$

$$y = e^{-x}(Ax + B) \quad \text{Allm. lösning}$$

Ex $y'' + 2y' + 5y = 0$

Kar. ekv $r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$$

Allm. Lösn: $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Ex 1. Allm lösn. $y = Ae^{x} + Be^{-2x}$