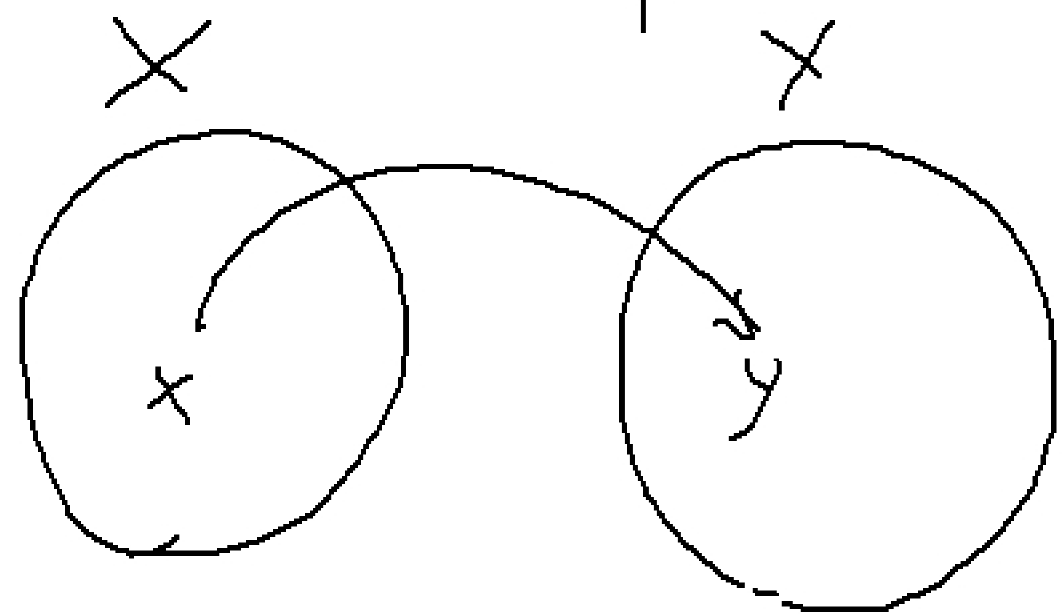
# Funktioner

Def. En tillordning som till varje element i en viss mängd $X$ ordnar högst ett elt. i en viss mängd $Y$, kallas en <u>funktion</u> från $X$ till $Y$.

$$f : X \to Y$$



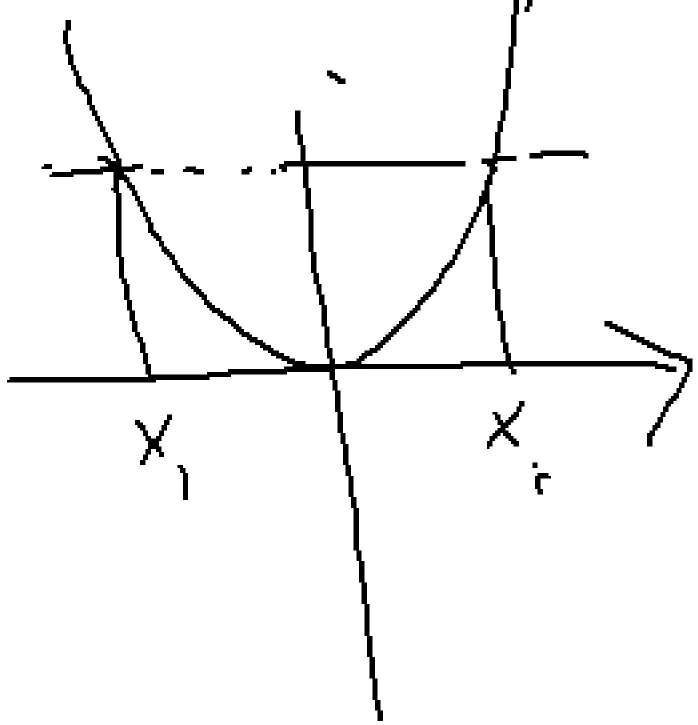
Definitionsmängden till $f$, $D_f$ är alla element i $X$ som tillordnas ett element i $Y$.

Värdemängden till $f$, $V_f$ är alla objekt i $Y$ som ordnas till något elt. i $X$

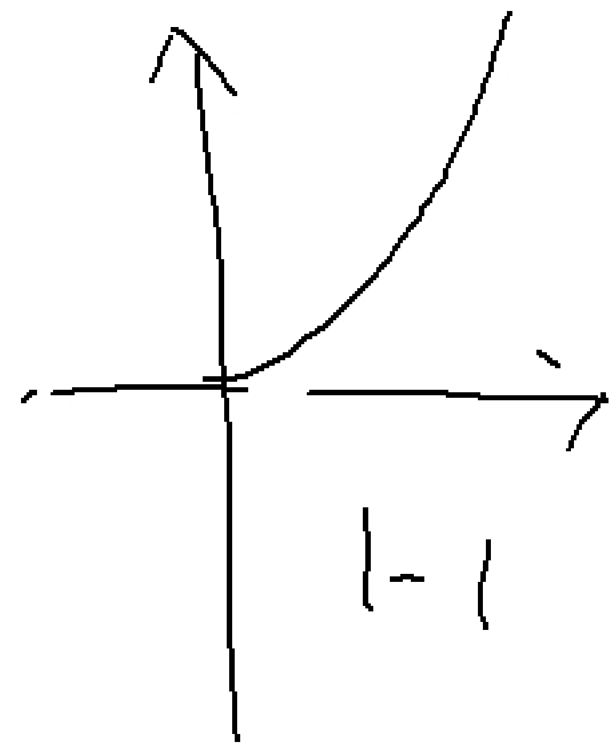
## 2.2.2 Inversa funktioner

**Def** En funkt, $f$ är 1-1

om $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$



Inte 1-1



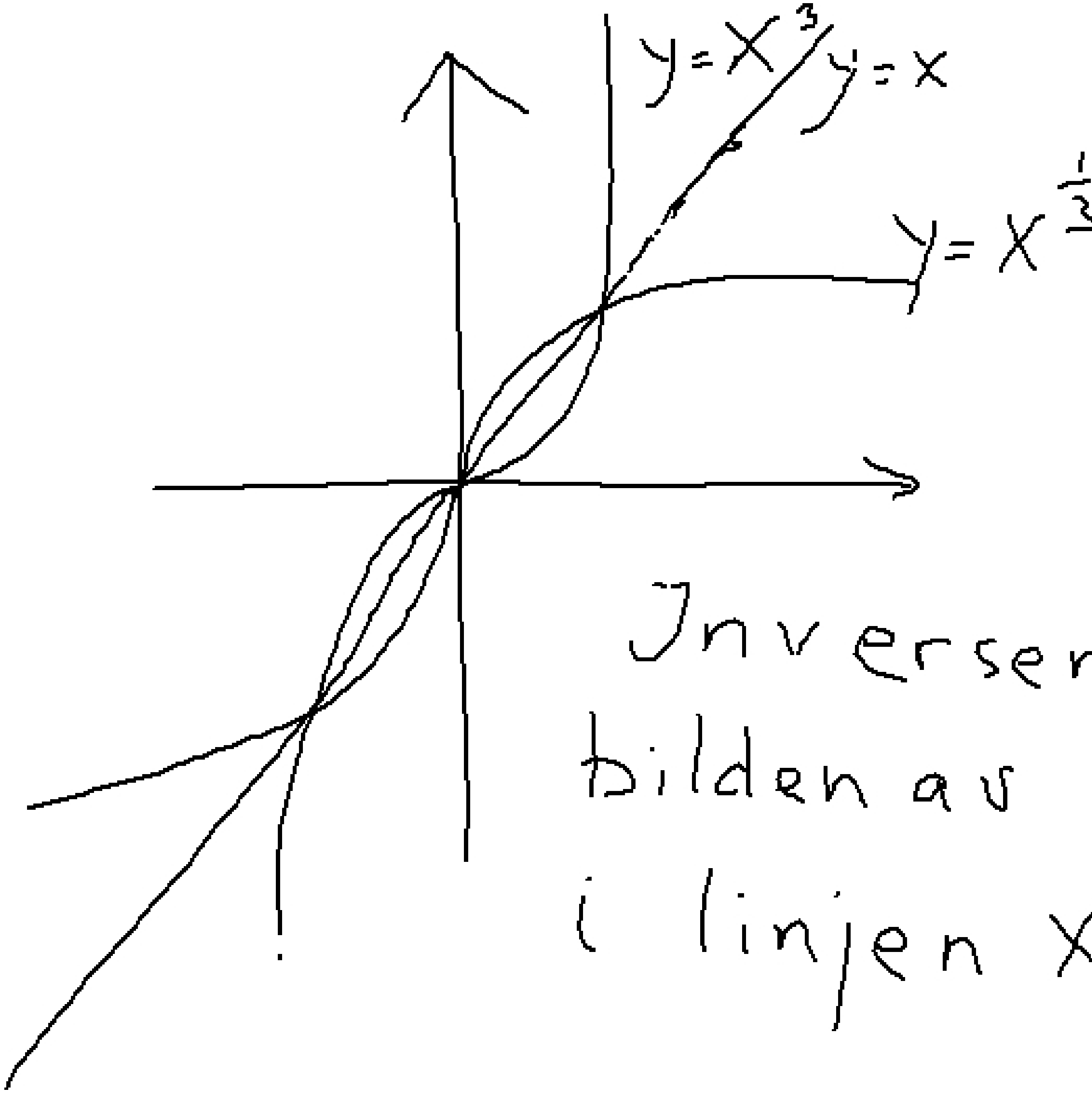
1-1

Def Om $f$ är 1-1 har $f$ en invers funktion $f^{-1}$. $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

Ex Bestäm inversen till $f(x)=x^3$.

$$y=x^3 \Longleftrightarrow x=y^{\frac{1}{3}}$$

Precis en lösning $\Rightarrow f^{-1}$ existerar och $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$. $f$ är inverterbar.




Inversen $f^{-1}$ är spegel-
bilden av funktionen $f$
i linjen $x=y$.

Strängt växande eller strängt avtagande funktioner (monotona funktioner) är inverterbara.

$$D_f = V_{f^{-1}}, \quad V_f = D_{f^{-1}}$$

$f^{-1}(f(x)) = x$ för alla $x$ i $D_f$

$f(f^{-1}(x)) = x$ —— " —— $D_{f^{-1}}$

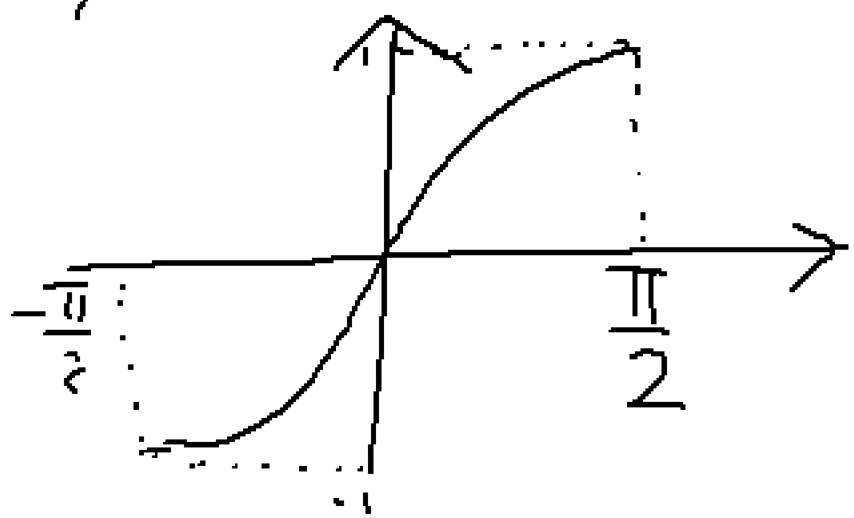
# Cyklometriska funktioner

Om definitionsmängden inskränks för de trigonometriska, så att varje funktionsvärde antas bara för ett x-värde, så blir de inverterbara.

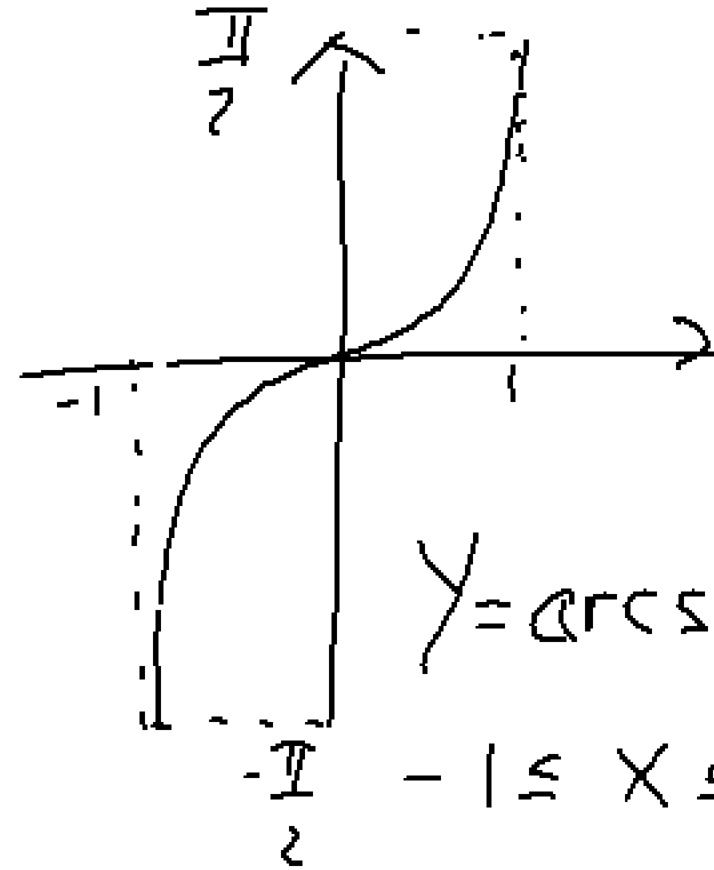
Inverserna kallas de <u>cyklometriska</u> funktionerna.

## Inskränkt fkn

$y = \sin x, \; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



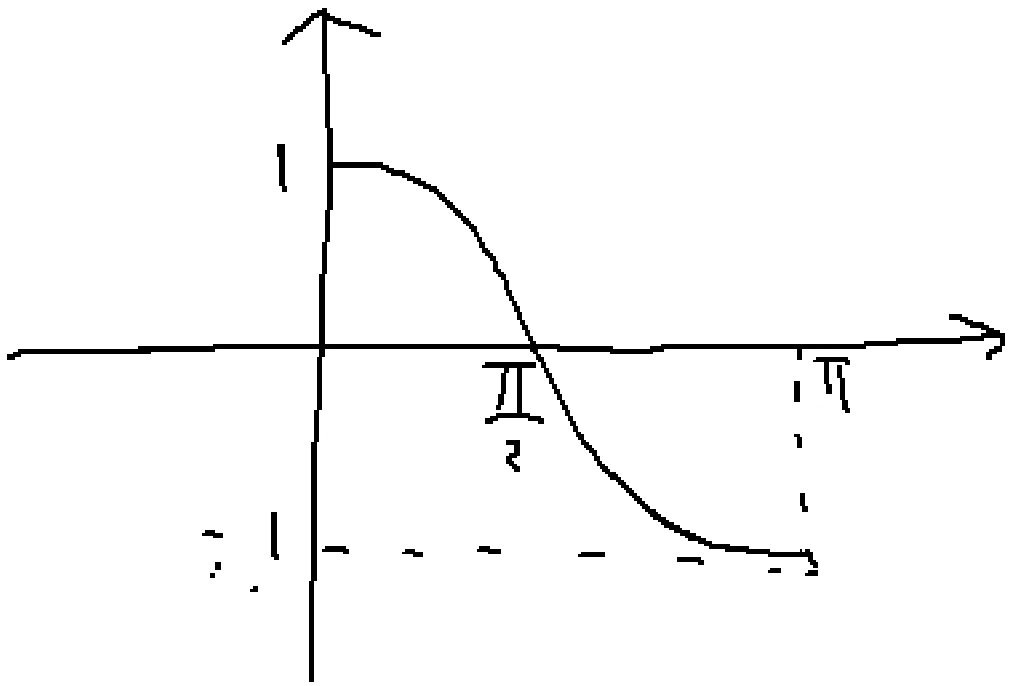

## Invers fkn



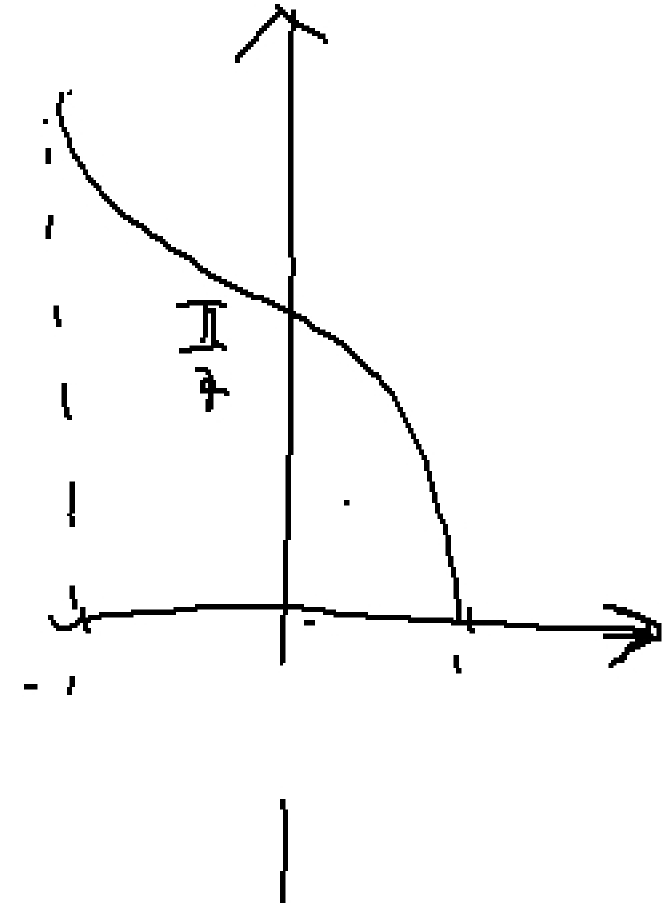

$y = \arcsin x$

$-1 \le x \le 1$

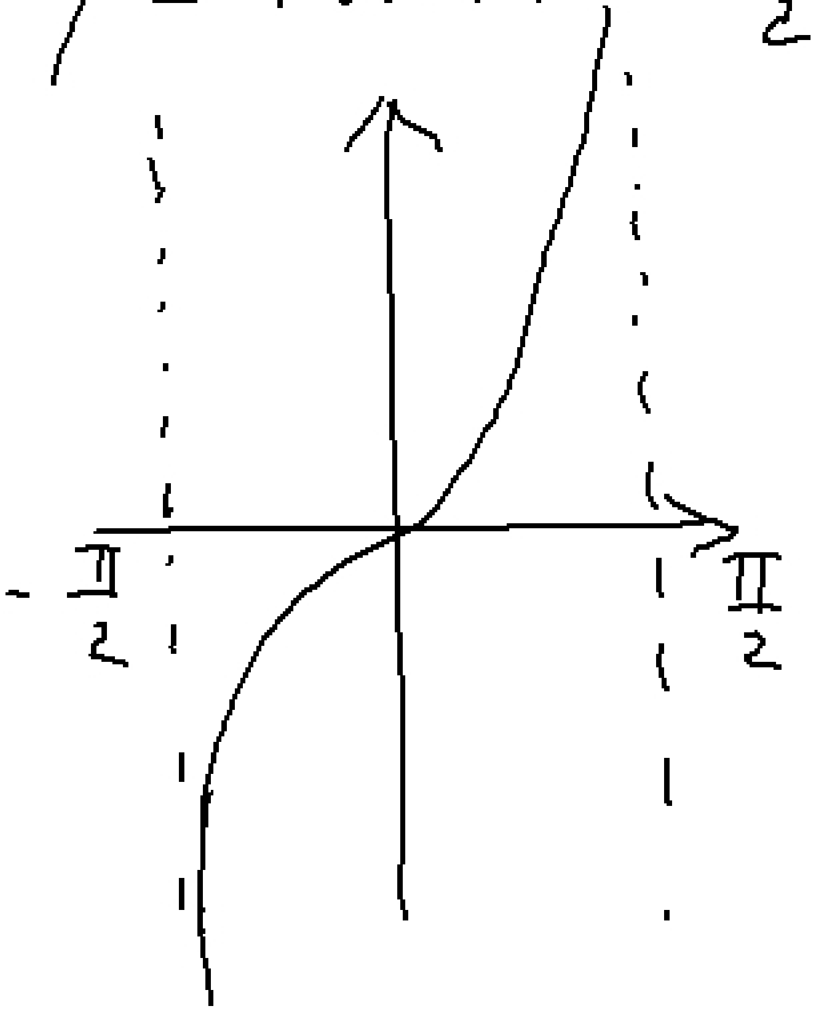
$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$



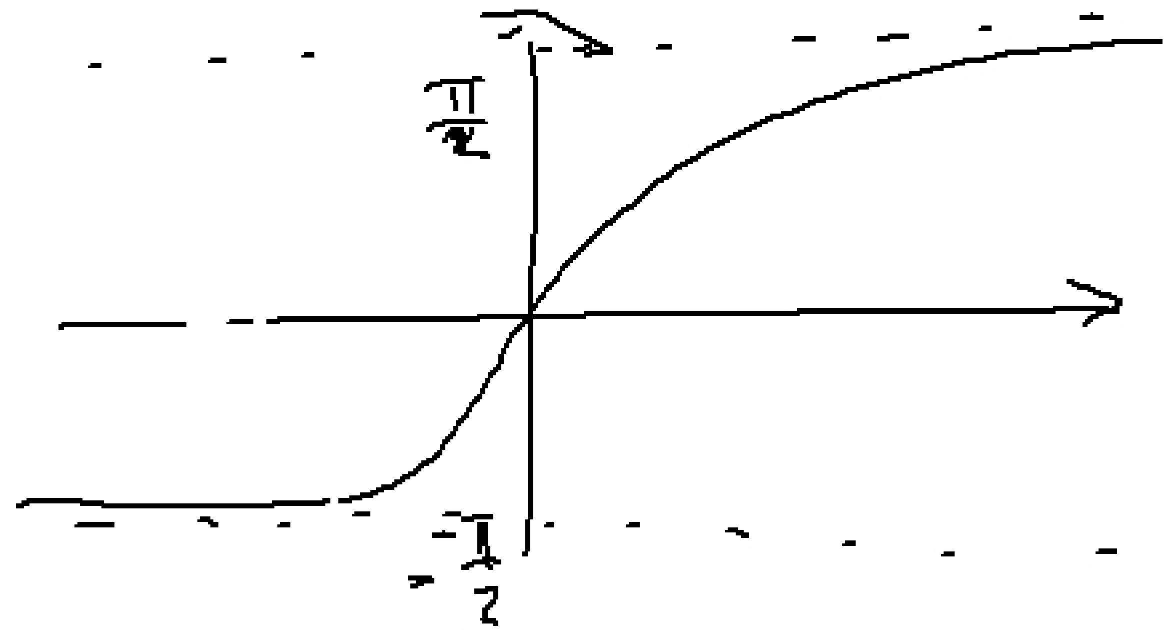

$y = \arccos x, -1 \le x \le 1$



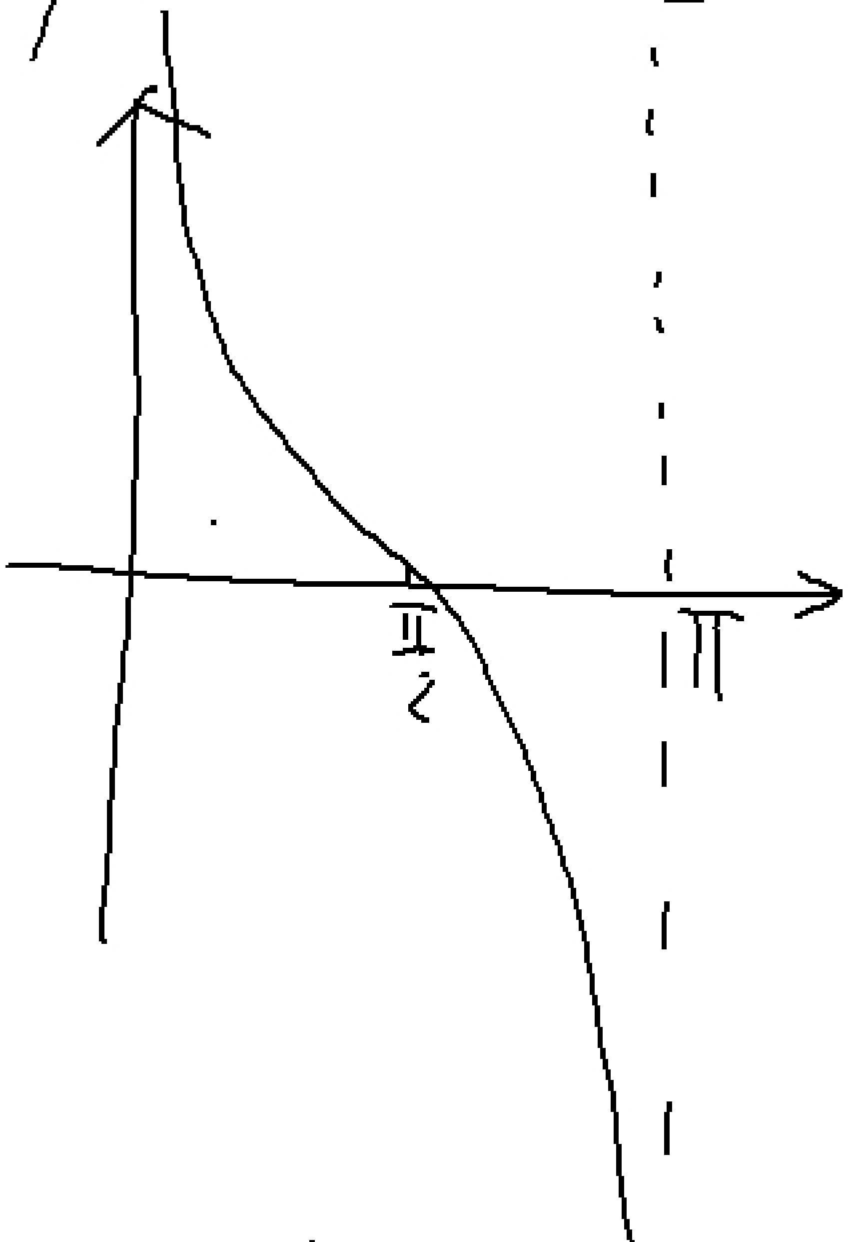
$y = \tan x, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



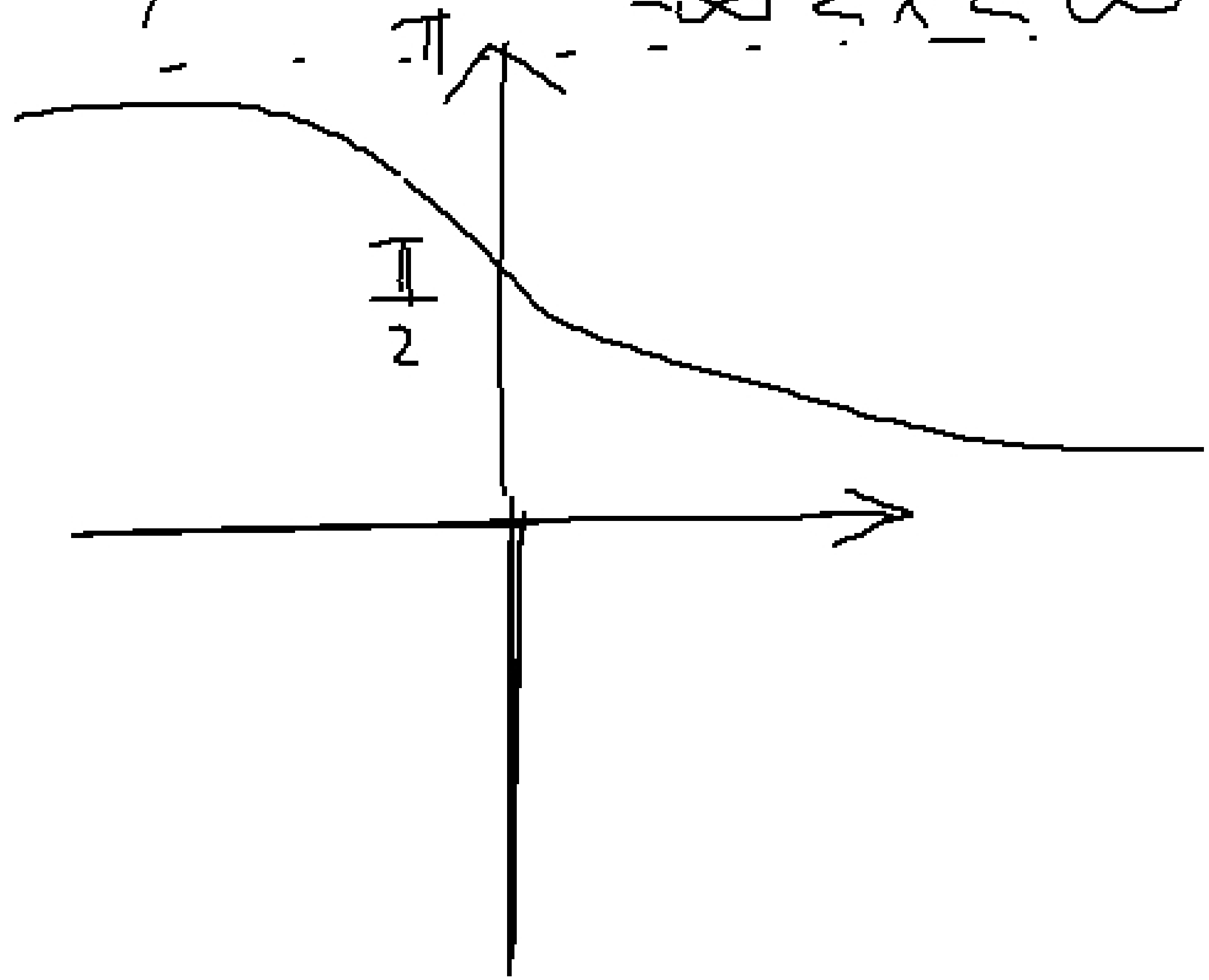

$y = \arctan x, -\infty < x < \infty$



$y = \cot x \quad 0 < x < \pi$




$y = \operatorname{arccot} x,$
$-\infty \leq x \leq \infty$




$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

**Def** $y = \arcsin x \Leftrightarrow y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ och $x = \sin y$

$\in$ tillhör

$y = \arccos x \Leftrightarrow y \in [0, \pi]$ och $x = \cos y$

$y = \arctan x \Leftrightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $x = \tan y$

$y = \text{arccot}\, x \Leftrightarrow y \in (0, \pi)$ $x = \cot y$

Ex Bestäm $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{6}$

# Samband

Om $|a| < 1$ så

$$\sin x = a \iff x = \begin{cases} \arcsin a + 2n\pi \\ \pi - \arcsin a + 2n\pi \end{cases}$$

$$\cos x = a \iff x = \pm \arccos a + 2n\pi$$

För alla $a$

$$\tan x = a \iff x = \arctan a + n\pi$$

$$\cot x = a \iff x = \operatorname{arccot} a + n\pi$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x \\ \cos(\arccos x) &= x \end{aligned}\right\}, \text{ om } |x| \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\left.\begin{aligned} \tan(\arctan x) &= x \\ \cot(\operatorname{arccot} x) &= x \end{aligned}\right\} \text{ för alla } x$$

$\arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \le x \le \pi$

$\arctan(\tan x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arccot}(\cot x) = x, \quad 0 < x < \pi$

<u>Ex</u> Bestām $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right)\right) =$

$= -\frac{\pi}{3}$

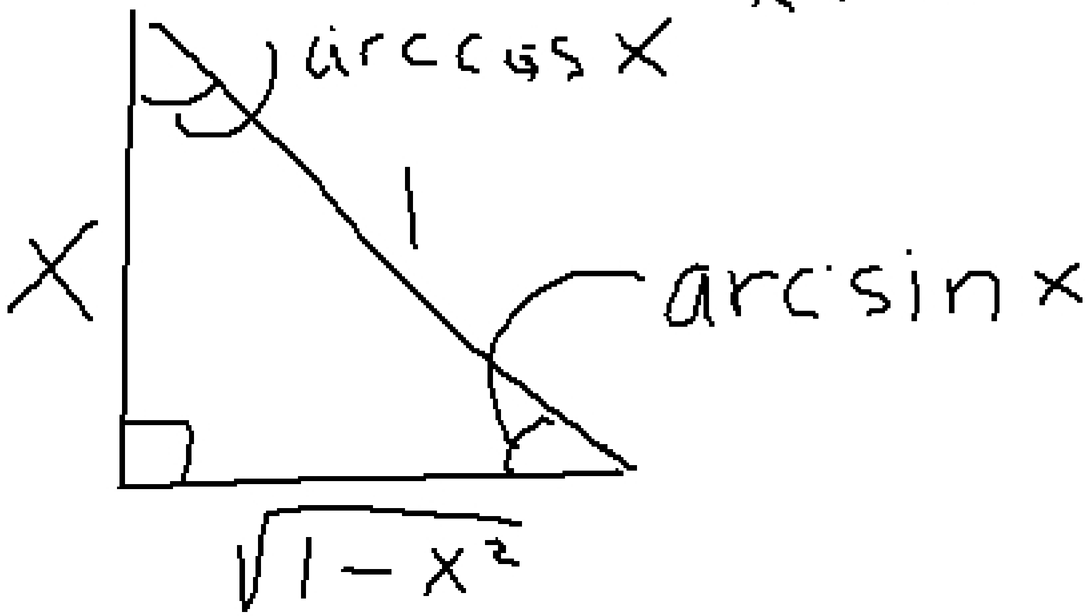
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

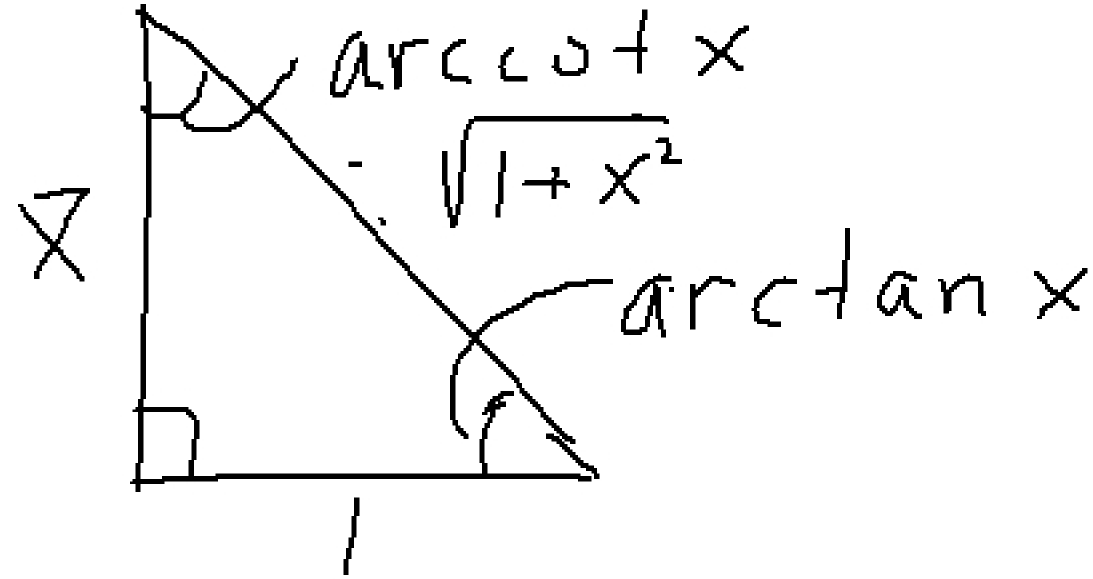
$\arctan(-x) = -\arctan x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

$x > 0$




$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Gäller för alla x, men alla möjliga samband gäller ej

# Hyperboliska funktioner

Def

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

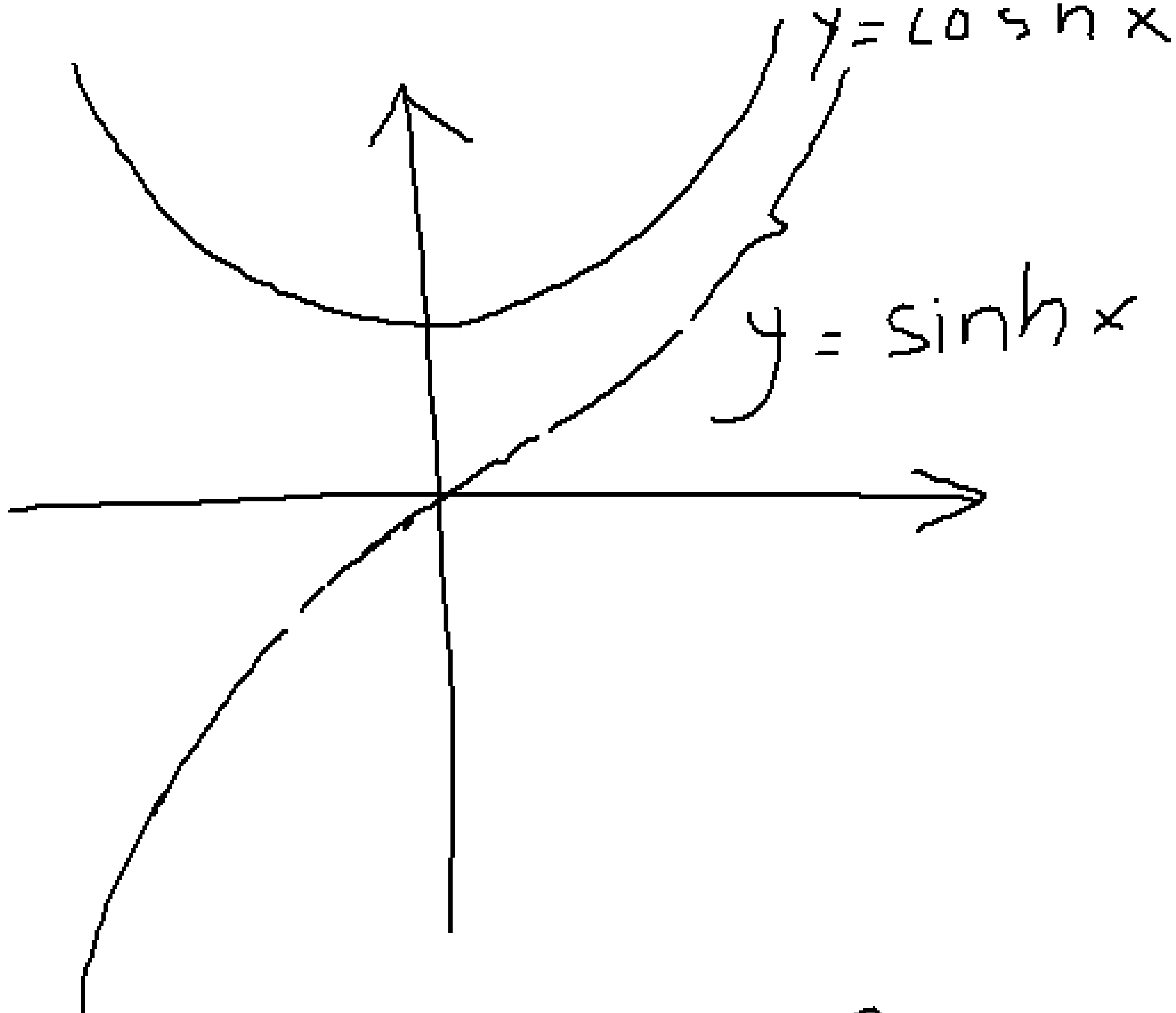
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Hyperboliska ettan

kedjelinjen

Catenoiden




## Elementära funktioner:

Polynom, rationella funktioner
exponential-, potens-, trig, logaritm,
cyklometriska funktioner