Sammansättning av funktioner

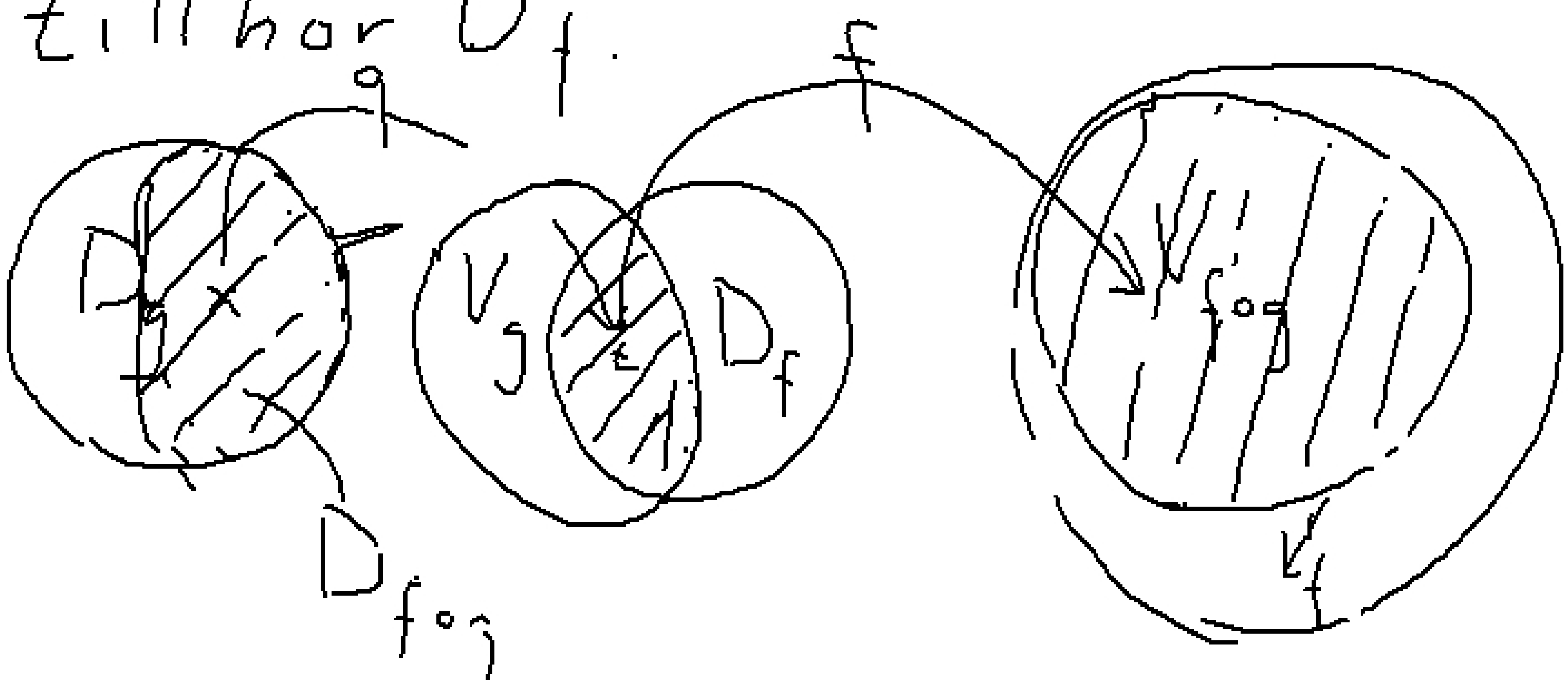
Def. Om $y = f(t)$ och $t = g(x)$

så är $y = f(x) = f(g(x))$

sammansättningen av f och g.

$D_{f \circ g}$ är de tal i D_g för vilka $g(x)$

tillhör D_f.



Ex $f(t)=\sqrt{t}$ $\qquad D_f=[0,\infty)$

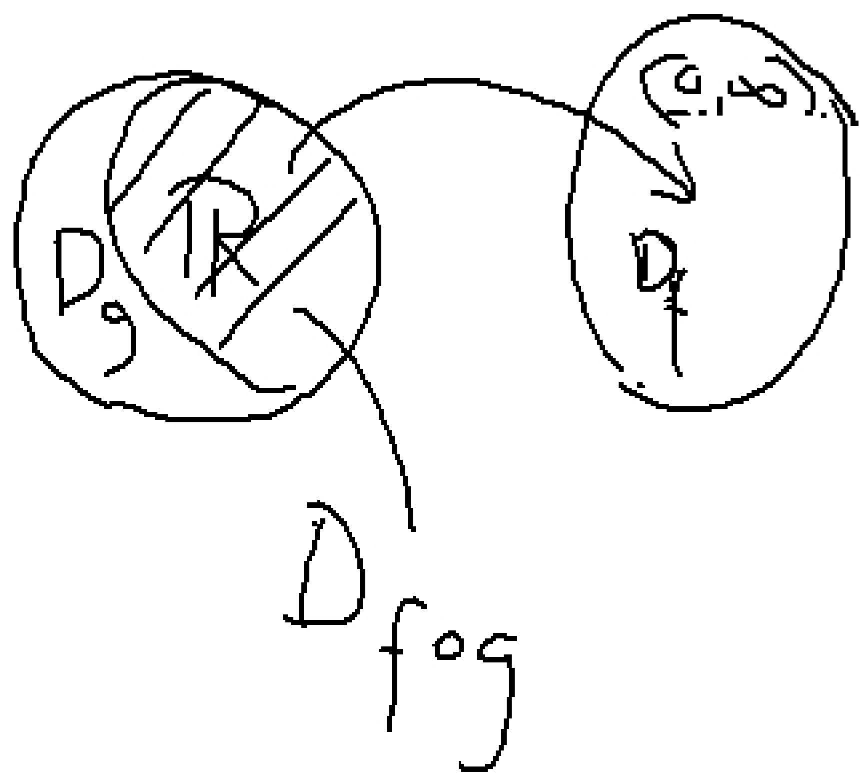
$g(x)=x+1$ $\qquad D_g=\mathbb{R}$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\sqrt{x+1} \qquad D_{f\circ g}=[-1,\infty)$$

$f(x)=\sqrt{x+1}$

$g(x)=x+1$

$f(t)=\sqrt{t}$



Elementära uttryck är uppbyggda av de elementära funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.

Olika typer av gränsvärden

Ex $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ är inte definierad då $x=1$.

Faktorisering ger $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$ om $x \neq 1$

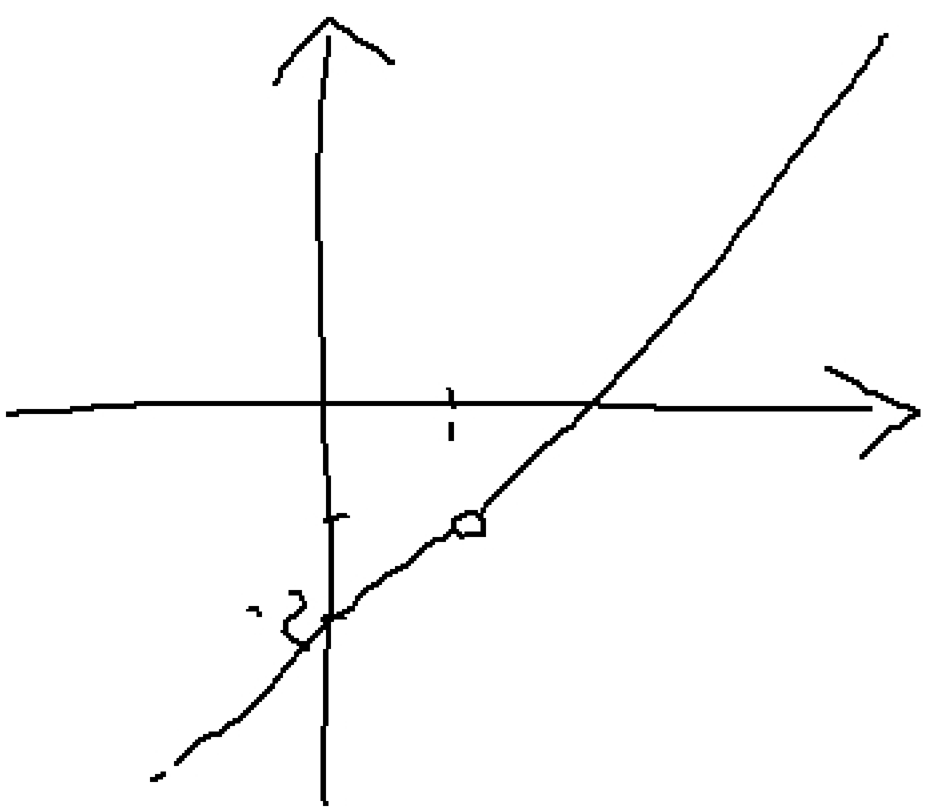
$f(x) \to 1-2 = -1$ då $x \to 1$

Man skriver $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

och säger att $f(x)$ har gränsvärdet

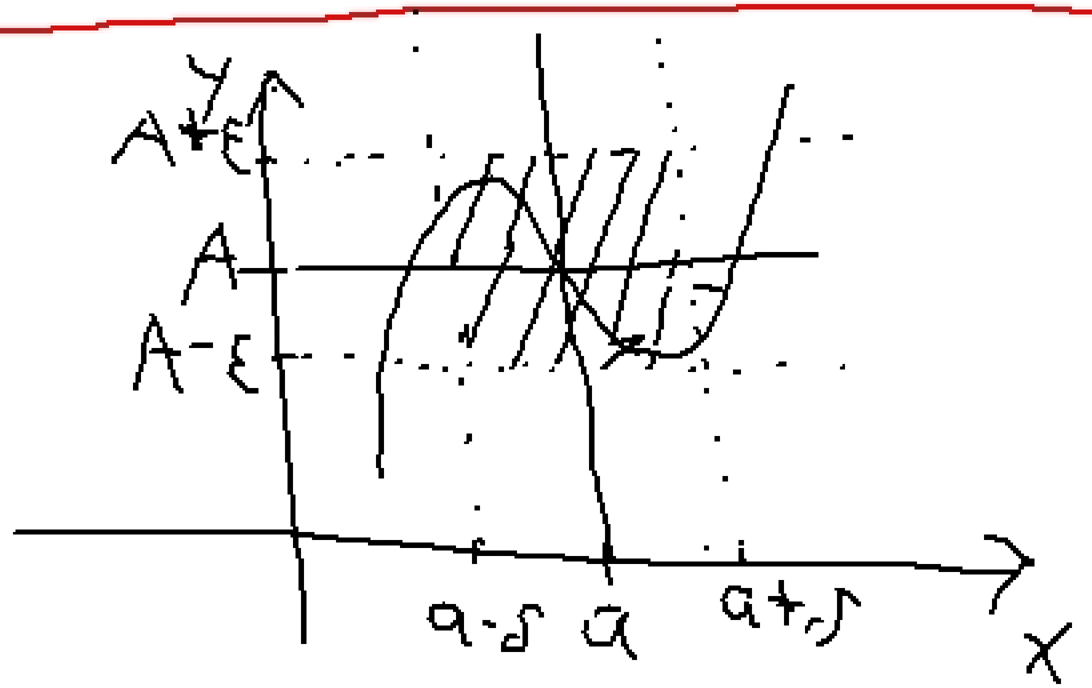
-1 då x går mot 1.

$f(x)$ konvergerar då $x \to 1$



Def. a och A är reella tal.

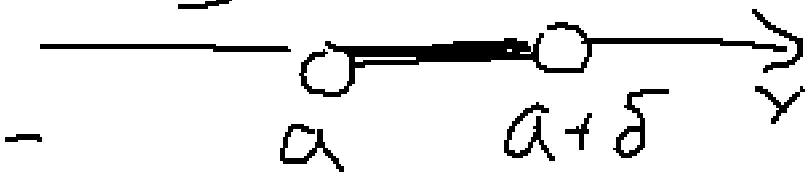
$\lim_{x \to a} f(x) = A$ om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla x sådana att $0 < |x-a| < \delta$.



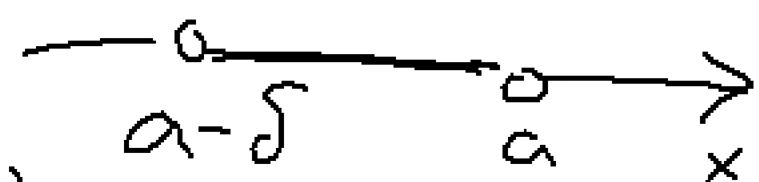
För $\varepsilon > 0$ kan vi välja δ så att kurvan ligger innanför det streckade området för $a - \delta < x < a + \delta$

$0<|x-a|<\delta$ kallas en **punktrad omgivning** till a.

punkterad högeromgivning $a<x<a+\delta$



— " — **vänster** — " — $a-\delta<x<a$



C, B, a, A reella tal

Egentligt gränsvärde $\lim_{x\to a} f(x)=A$

— " — **högergränsvärde** $\lim_{x\to a+} f(x)=B$

— " — **vänstergränsvärde** $\lim_{x\to a-} f(x)=C$

Oegentligt gränsvärde

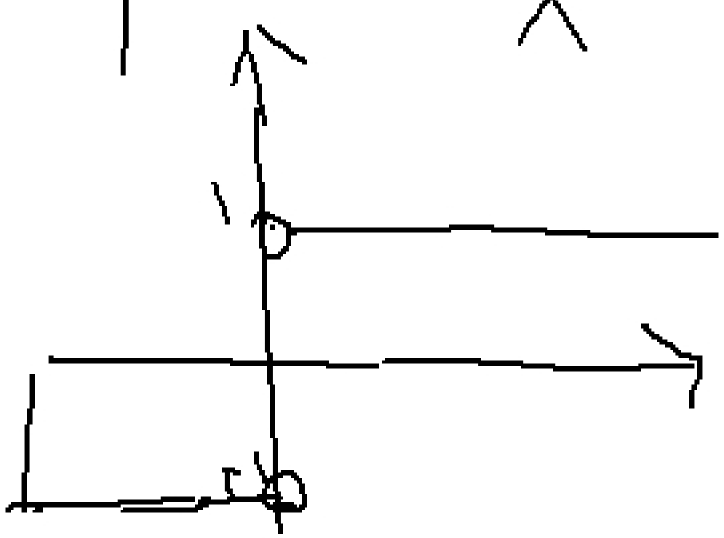
$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

— " — högergränsvärde $\lim_{x\to a+} f(x)=\infty$

— " — vänster — " — $\lim_{x\to a-} f(x)=\infty$

f(x) divergerar när gränsvärdet är oegentligt.

Ex $f(x)=\dfrac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x = \begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$



$\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$

Om vänstergränsvärdet och högergränsvärdet är olika finns inte gränsvärdet.

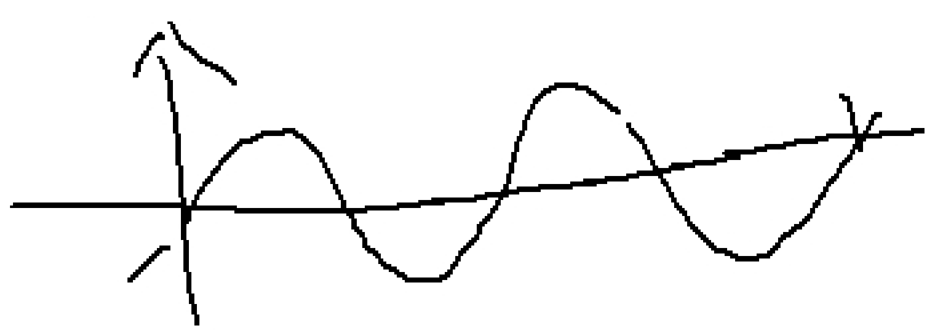
Gränsvärden då $x \to \infty$ eller $-\infty$

Egentligt gränsvärde $\lim_{x \to \infty} f(x) = \underline{A}$ konvergerar

$(x \to -\infty)$

Oegentligt gränsvärde $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ divergerar då $x \to \infty$

Oscillation



gränsvärdet då $x \to \infty$ existerar inte

Räkneregler då $\lim_{x \to a} f(x) = A$

$\lim_{x \to a} g(x) = B$

A, B reella tal

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = A - B$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B} \quad \text{om } B \neq 0$$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow A \leq B$$ olikhet bibehålls

$$\lim_{x \to a} c = c \quad \text{om } c \text{ är konstant}$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \iff \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad f(x) > 0 \text{ i en omg. av}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \text{— '' —} \quad f(x) < 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty \quad \text{om } a > 1 \text{ och } \alpha \text{ konstant}$$

$a > 1$ och $\alpha > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$

och $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{om } a > 1 \\ 0 & \text{om } 0 < a < 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty}$ — " — $= -\frac{\pi}{2}$