Obestämda uttryck

"$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", "0^0", "∞^0", "1^∞"

Aritmetiska lagar för oegentliga gränsvärden

$\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$

$a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$,

$a \cdot \infty = \operatorname{sgn} a \, \infty$, $a(-\infty) = -\operatorname{sgn} a \cdot \infty$

$\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty(-\infty) = -\infty$

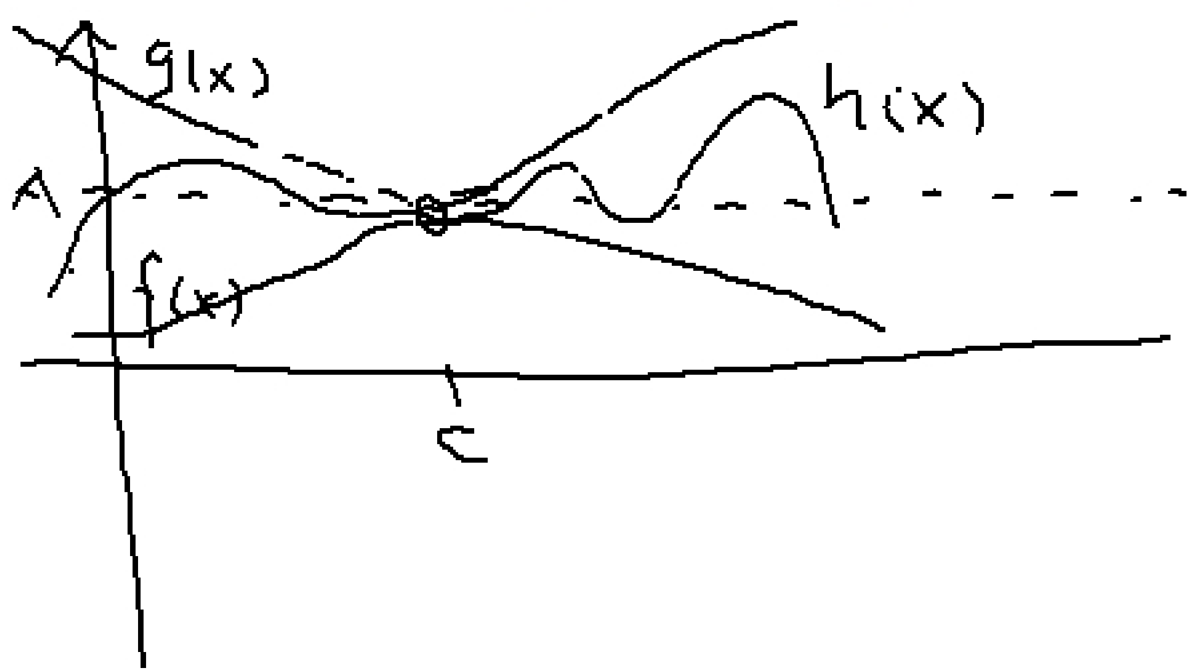
$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Instängningsprincipen

$f(x) \le h(x) \le g(x)$ på ett öppet intervall $[(a,b), (a,\infty), (-\infty,\infty)]$ som innehåller c och $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A$

$\Longrightarrow \lim_{x\to c} h(x) = A$

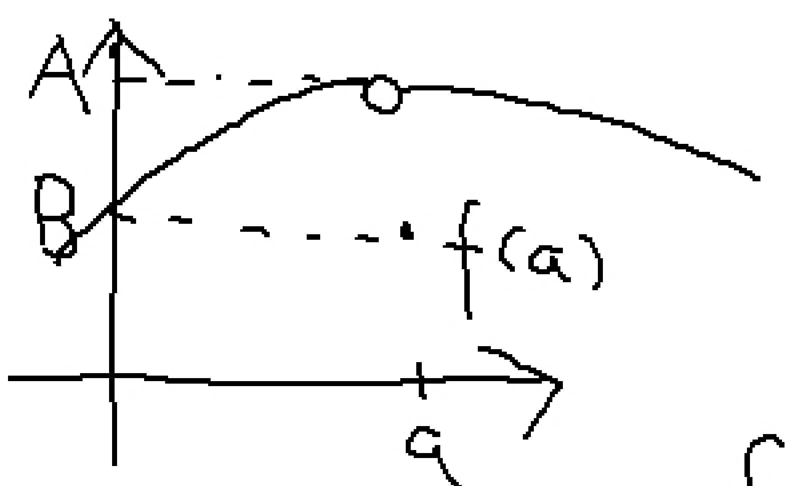


Kap 3.2 Kontinuitet

Def. $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ om

1) f är definierad i en omgivning av a och
2) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ex



$\lim_{x \to a} f(x) = A$

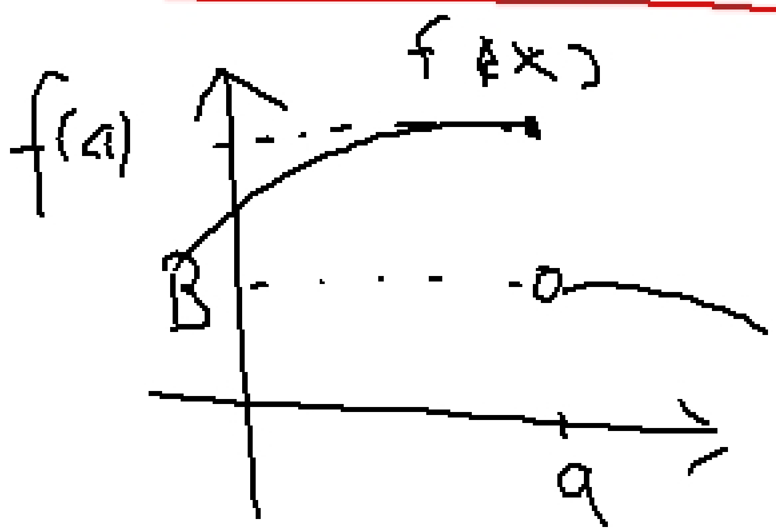
$f(a) = B \neq A$

$f(x)$ ej kontinuerlig i a

Def $f(x)$ är höger kontinuerlig i $x=a$
(vänster —"—)
om 1) f är def. i en högeromgivning (vänster —"—) till a och

2) $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$

$(x\to a-)$



$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

$\lim_{x\to a+} f(x) = B \neq f(a)$

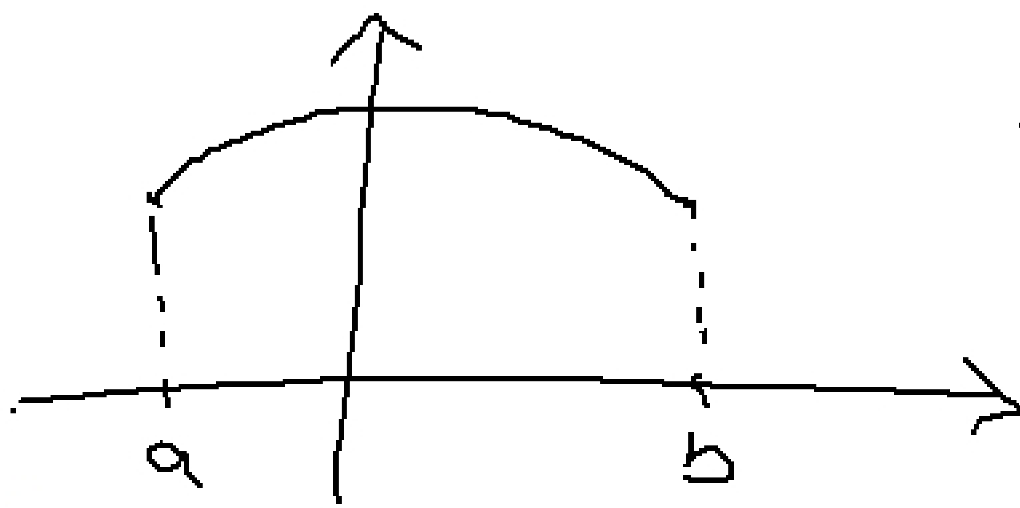
Vänsterkont. ej högerkont

Om $D_f = [a,b]$, menar vi med kontinuitet i a att f är högerkont. i a

i b —— " — vänsterkont. i b

—→— " ——

Ex



f kontinuerlig

Def f är kontinuerlig om den är kont. för alla punkter i D_f.

Sats Varje elementärt uttryck definierar en kontinuerlig funktion.

Om D_f inte anges är det alla reella tal x för vilka $f(x)$ är ett reellt tal.

Satsen om mellanliggande värden

Om $f(x)$ är kontinuerlig på ett intervall och f antar värdena c och d så antar f alla värden mellan c och d.

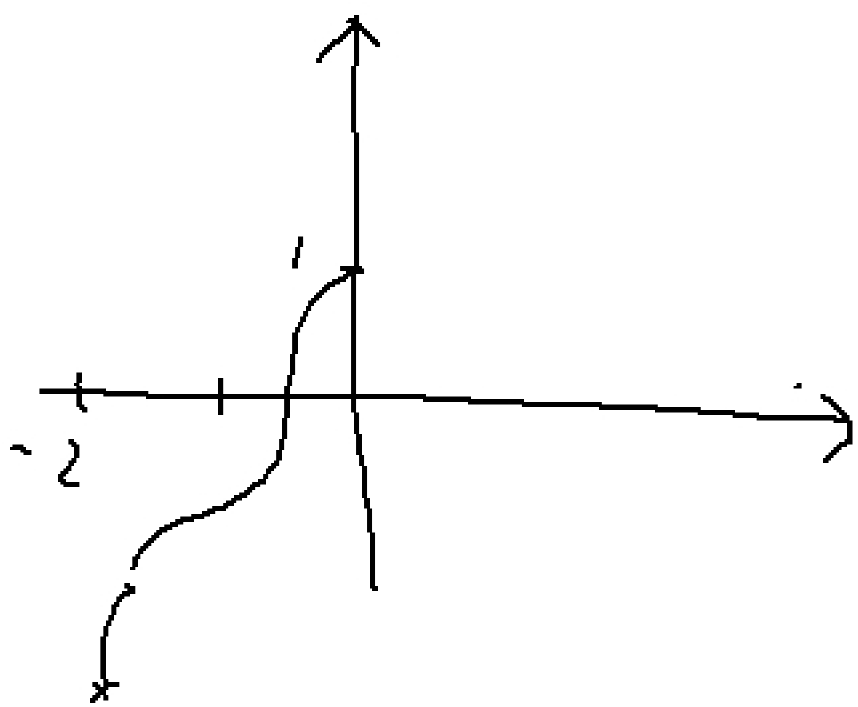
Ex Visa att $x^3+x^2+1=0$ har minst en reell rot.

Sätt $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

$f(-2) = -8 + 4 + 1 = -3$

$f(0) = 1$

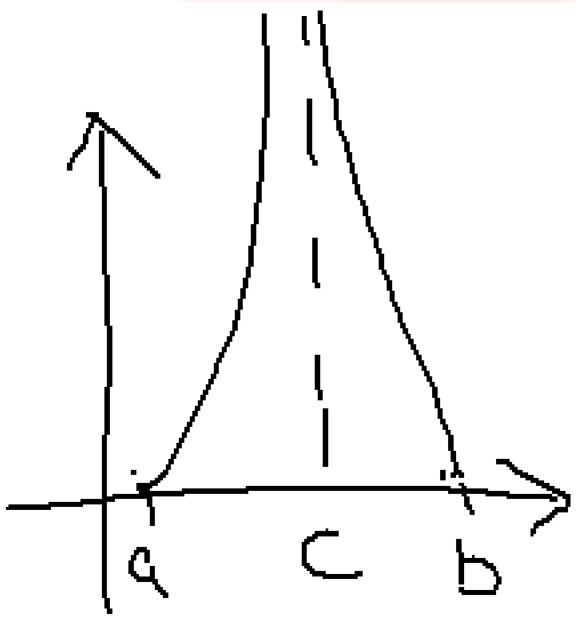
Det finns en rot på $-2 < x < 0$.



Satsen om extremvärden

Om f är kont. och def. på ett slutet intervall [a,b] så antar f ett största och ett minsta värde på intervallet.

Ex



Ej def i x = c
inget största värde

Sats $\lim_{x \to a} f(x)$

1) är ett reell tal,

2) är ∞ eller $-\infty$

eller 3) existerar inte.

1) f är konvergent då $x \to a$

2) 3) f är divergent

2) gränsvärdet är oegentligt

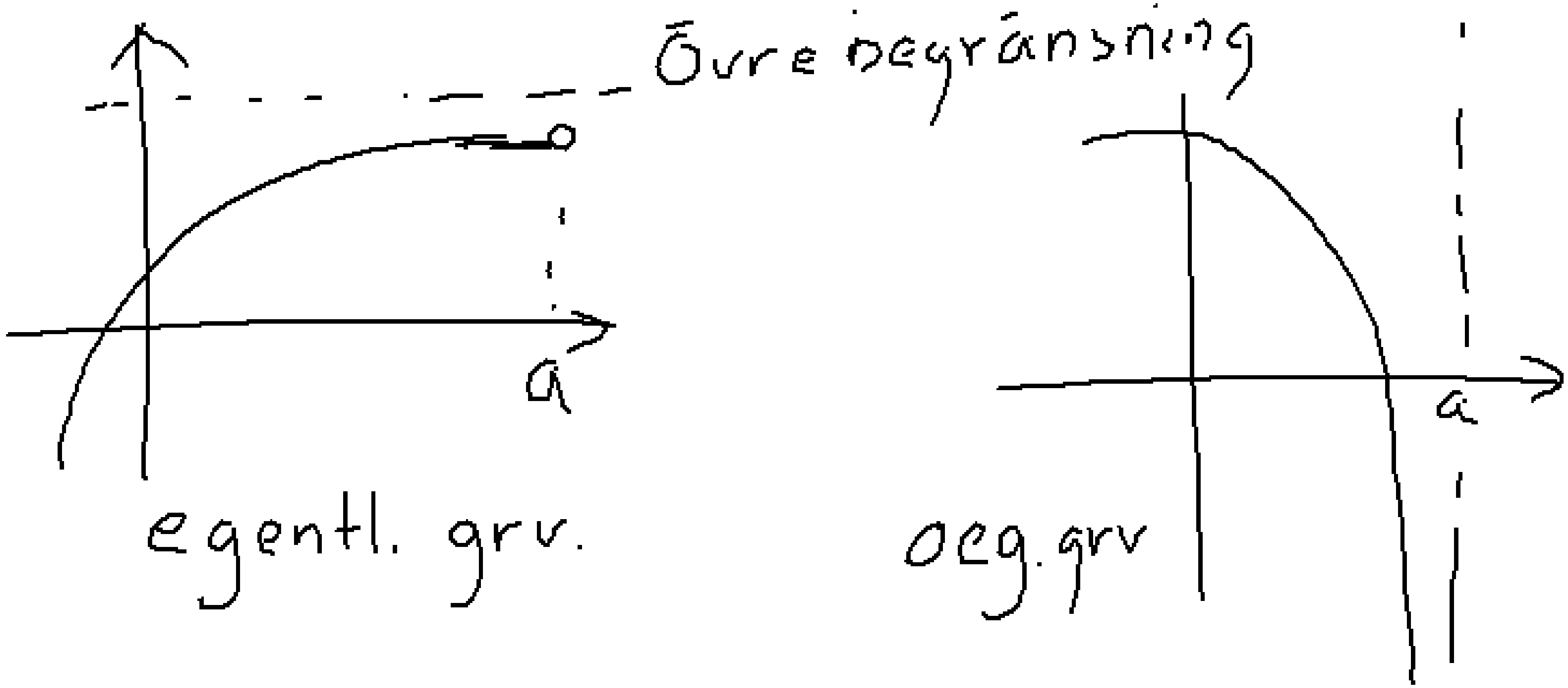
y

Sats Om $f(g(x))$ är def. på ett intervall som innehåller a och f är konti i L och $\lim_{x\to a} g(x) = L$ så gäller

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Sats om monotona funktioner

Om $f(x)$ är växande (avtagande) för $x<a$, så har $f(x)$ egentligt eller oegentligt gränsvärde då $x \to a^-$. Om funktionen är uppåt (nedåt) begränsad är gränsvärdet egentligt.

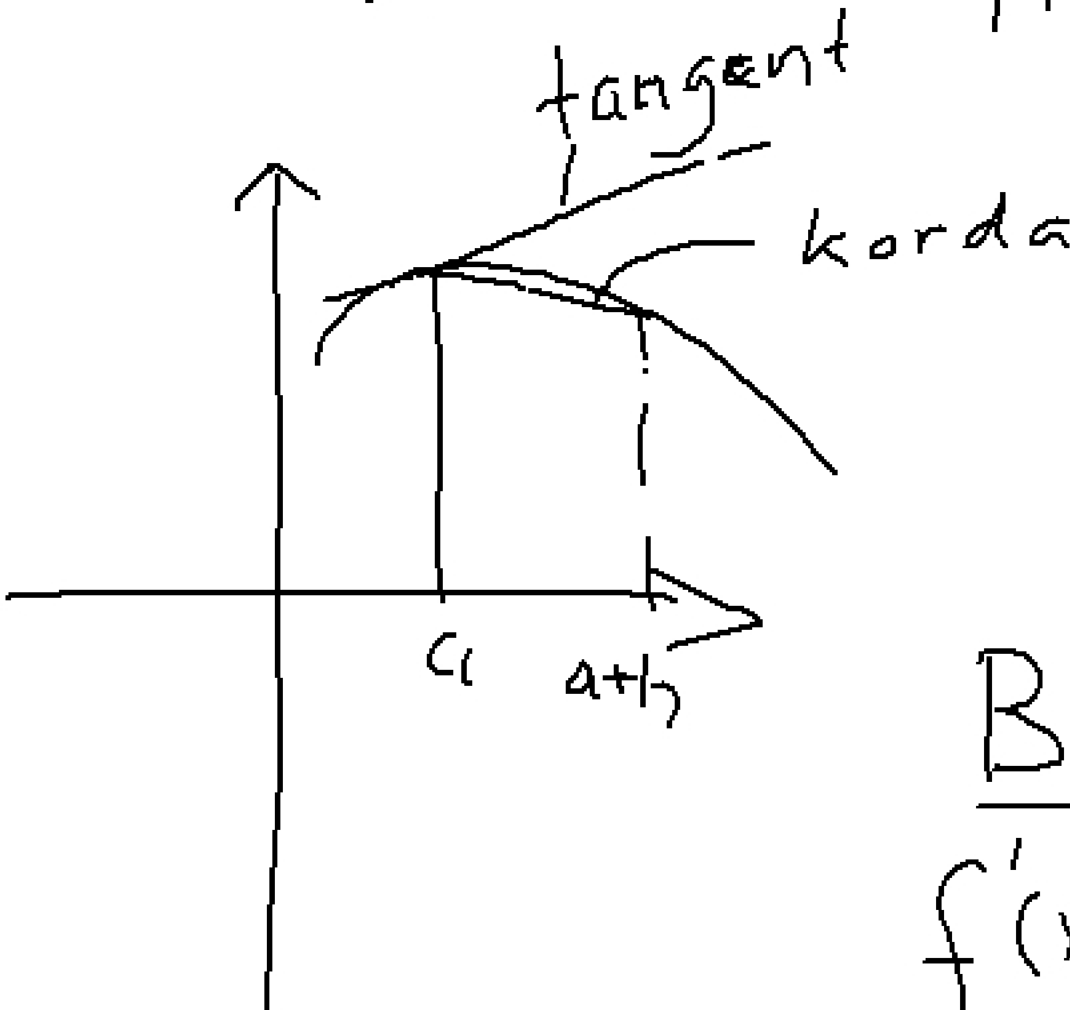


Kap 4 Derivata

Def Derivatan till f i punkten a ges av

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ differenskvoten till f i $x=a$ anger kordans lutning.



När h minskar så närmar sig kordan till tangenten i $x=a$.

Beteckningar

$f'(x)$, $\underbrace{\dfrac{df}{dx}, \dfrac{dy}{dx}}_{\text{ingen kvot}}$, Df

gränsvärle

Def. Då $f'(a)$ är ett reellt tal sägs f vara <u>deriverbar i a</u>.

Om f är deriverbar i alla punkter på ett intervall I är f <u>deriverbar på I</u>.

f är <u>deriverbar</u> om f är deriverbar på D_f.

En punkt där f inte är deriverbar kallas en <u>singulär</u> punkt för f.

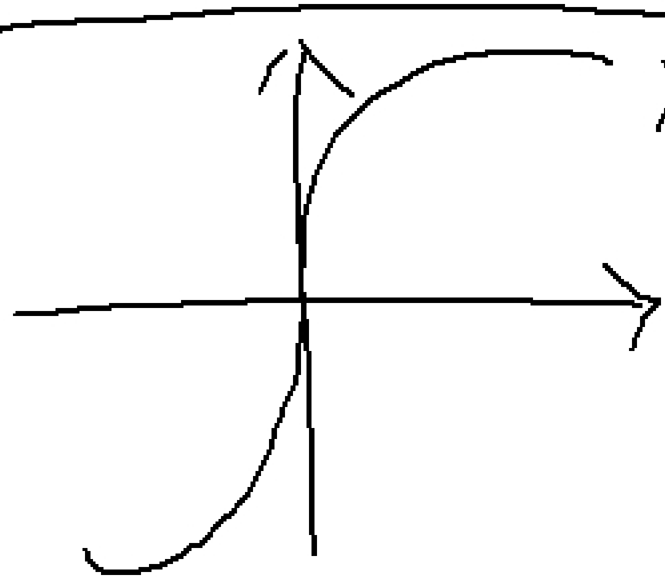
Tangent till $f(x)$ i $(a, f(a))$ är linjen med lutning $f'(a)$.

Normal till $f(x)$

lutning $-\frac{1}{f'(a)}$

Högerderivata $f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Vänsterderivata $f'_-(a) = \lim \quad f(0 \quad) - f(a)$

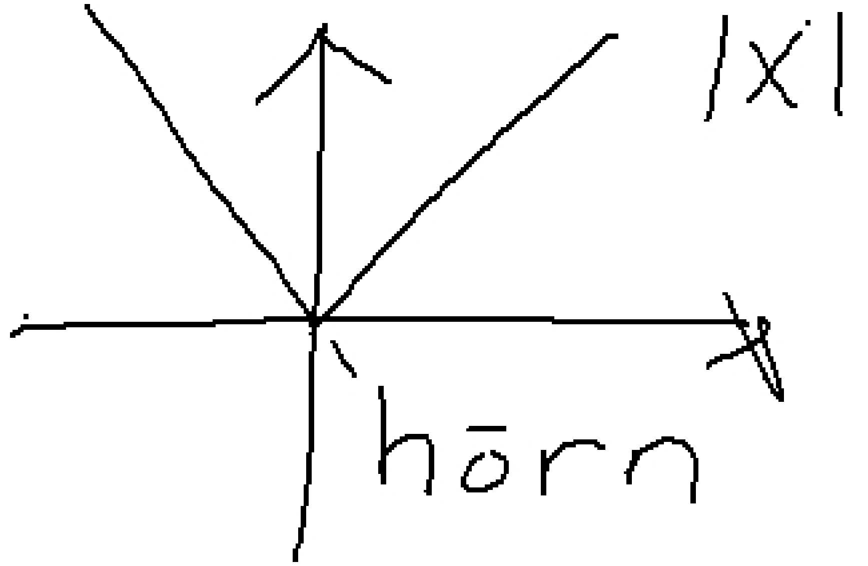


$x^{\frac{1}{3}}$

$|x|$

lodrät tangent i $x = 0$

$x = 0$



$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{|h| - 0}{h} =$$

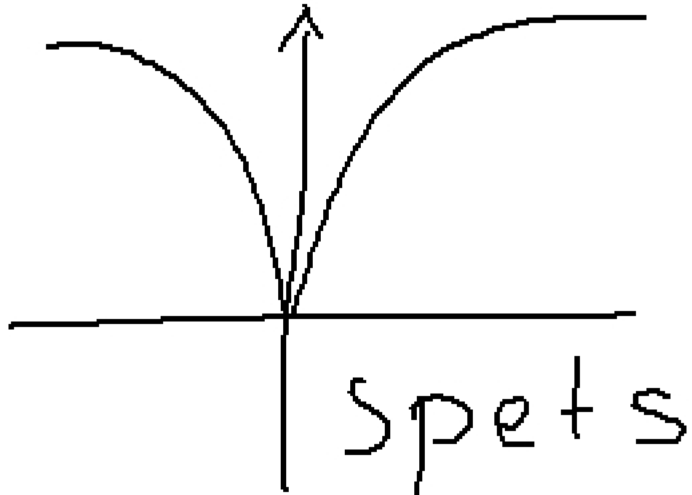
$$\lim_{h \to 0+} \operatorname{sgn} h = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{sgn} h = -1$$

Vänster tangent $y = -x$

höger tangent $y = x$

$f'(0)$ existerar inte



$x^{2/3}$

Lodrät tangent

Deriveringsregler

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(c f(x))' = c f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$$

$$(f(g(x)))' = \Big[f'(t)\Big]_{t=g(x)} \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left[\frac{1}{f'(y)}\right]_{y=f^{-1}(x)} \quad \text{då } f'(f^{-1}(x)) \neq 0.$$

$f(x)$	$f'(x)$
C, konst	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$(\ln a)\, a^x$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-1-\cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\log_a x \qquad \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{(\ln a)x}$

$\ln x \qquad \dfrac{1}{x}$

$\arcsin x \qquad \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos x \qquad -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan x \qquad \dfrac{1}{1+x^2}$

$\operatorname{arccot} x \qquad -\dfrac{1}{1+x^2}$