Sats 7.3 $f(x)$ och $g(x)$ är integrerbara. Då gäller

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

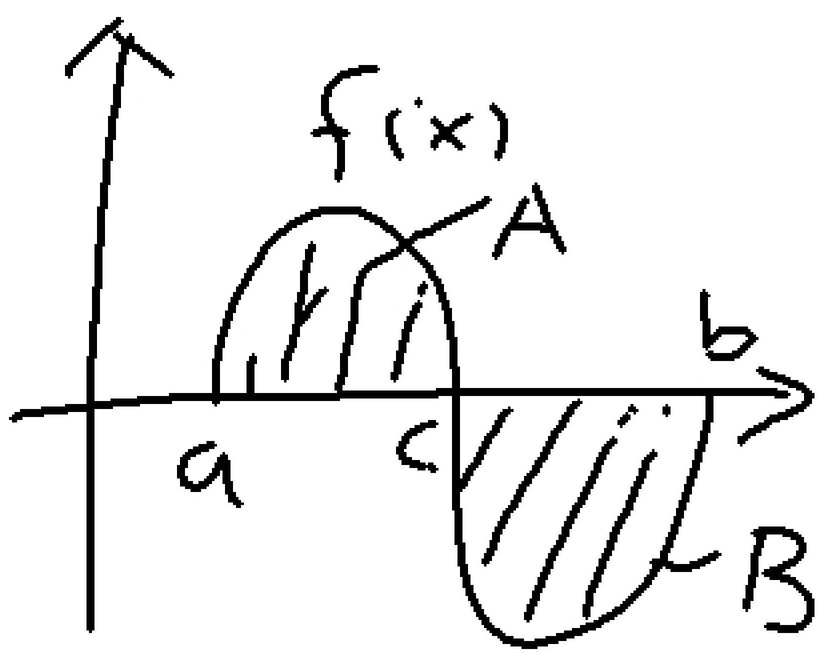
2. $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

4. $f(x) \geq g(x),\ a \leq x \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

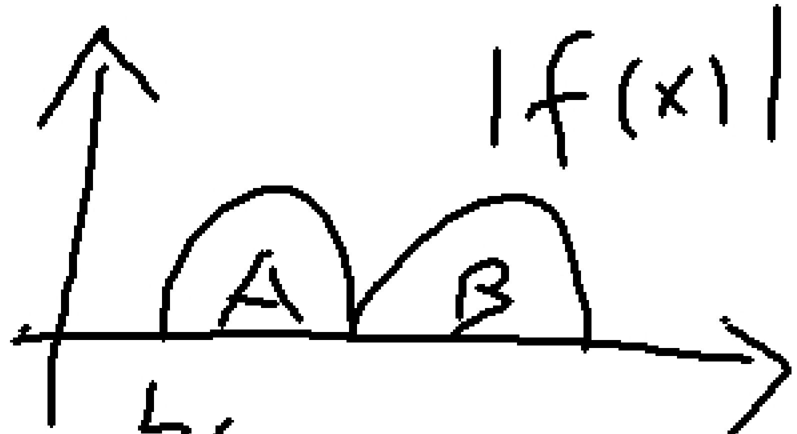
5 Triangelolikheten för integr.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)\,dx|,\ a \le b$$



$VL = |A - B|$

$HL = A + B$



6. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

7.2.2 Medelvärden

Def $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

kallas medelvärdet av f i intervallet $[a,b]$

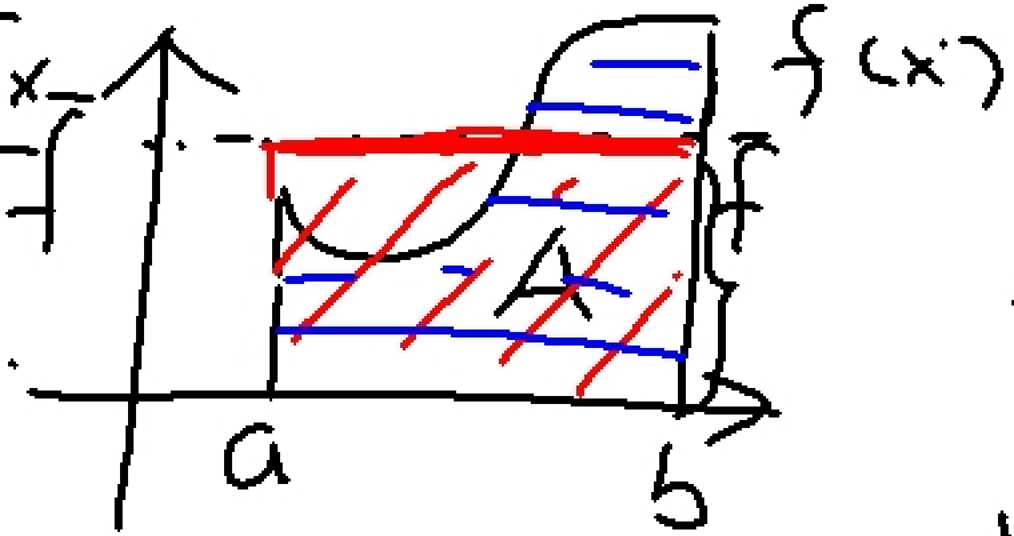
Ex Förflyttningen $s = \displaystyle\int_a^b v(t)\,dt$

från tiden $t=a$ till $t=b$ där $v(t)$

är hastigheten vid tiden t

$$\bar{v} = \frac{s}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\,dt$$

Ex



$$\text{Arean} = \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\frac{b-a}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= (b-a) \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot \bar{f}$$

basen · höjden i rektangeln

Integralkalkylens medelvärdessats.

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så finns en punkt c i intervallet sådan att

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

<u>Bevis</u> f kont. $\Rightarrow$ f antar ett minsta värde m och ett största värde M på $[a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$ på $[a,b]$

Sats 7.3 $\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

f antar alla värden mellan m och M (kontinuerlig) så f antar också

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \therefore \quad f(c) = \bar{f}$$

$$a \leq c \leq b$$

7.2.3 Existens av primitiva funktioner

Sats Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så är

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

dvs $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ är primitiv funktion till f.

Bevis $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = [\text{Sats } 7.3]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt}{h} = [\text{Sats } 7.3]$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \bar{f} =$$

$$\lim_{h\to 0} f(c),\ x \le c \le x+h = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \iff$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff F'(x) = f(x)$$

Om F är primitiv funktion

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\cdot g'(x)$$

Härledning: $f(x) = F'(x) \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big(F(g(x)) - F(a)\Big)$$

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \right]$$

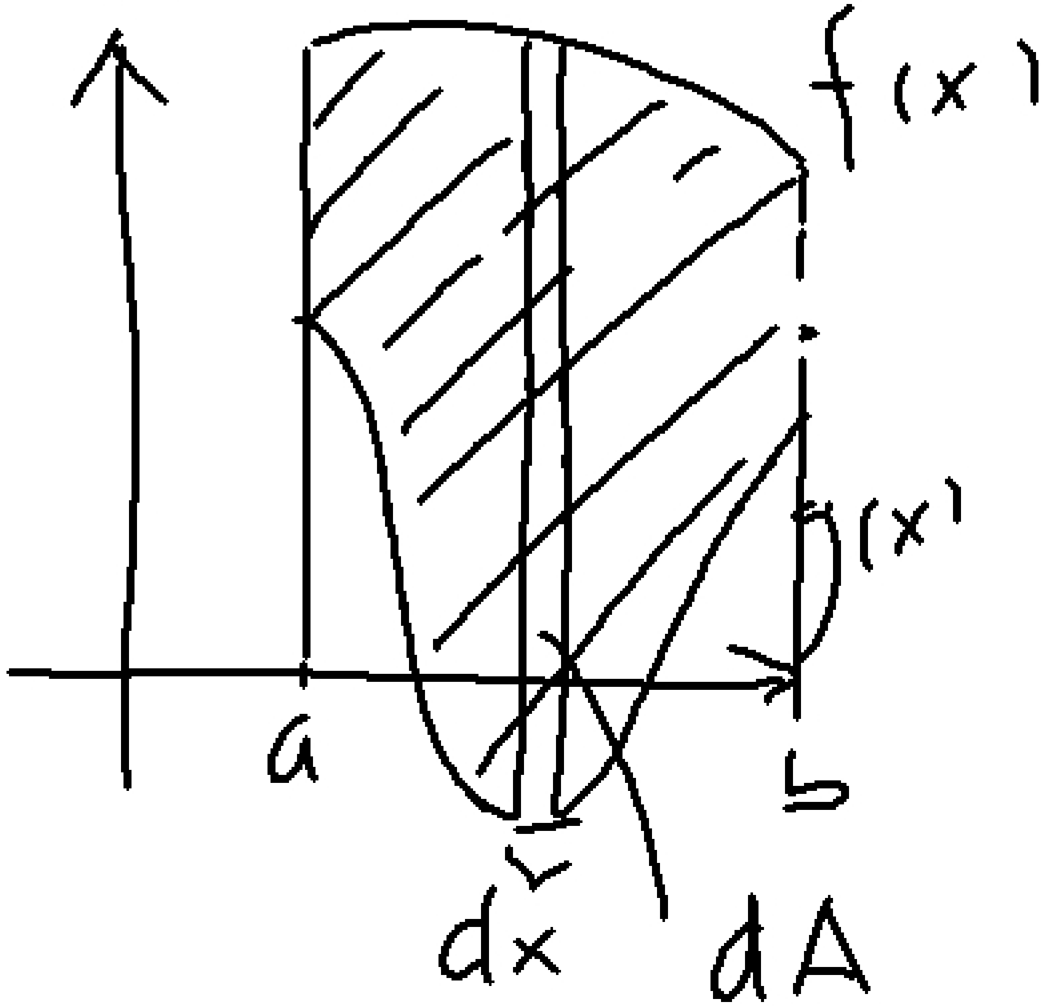
$$= F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

kedje-
regeln

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{h(x)} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt \right) + \frac{d}{dx}\int_{a}^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$$

8.2 Areor av plana områden



$$dA = (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$