7.3.4 Generaliserade integraler

En kontinuerlig och begränsad funktion är Riemannintegrerbar på ett begränsat intervall $[a,b]$.

En integral kallas generaliserad av

Typ 1 om $a=-\infty$, $b=\infty$ eller båda gäller.

Typ 2 om $f(x) \to \infty$ $(-\infty)$ då $x \to a$ eller $x \to b$ eller båda

Def $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$ om f är kont på $[a,\infty)$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{b} f(x)\,dx \text{ om } f \text{ är kont. på } (-\infty, b]$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to a} \int_{r}^{b} f(x)\,dx \text{ om } f \text{ är kont på } (a,b] \text{ och ev. obegr. nära } a.$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to b} \int_{a}^{r} f(x)\,dx \text{ om } f \text{ är kont på } [a,b) \text{ och ev. obegränsad nära } b.$$

<u>Ex</u> $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{1}^{R} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{R} =$

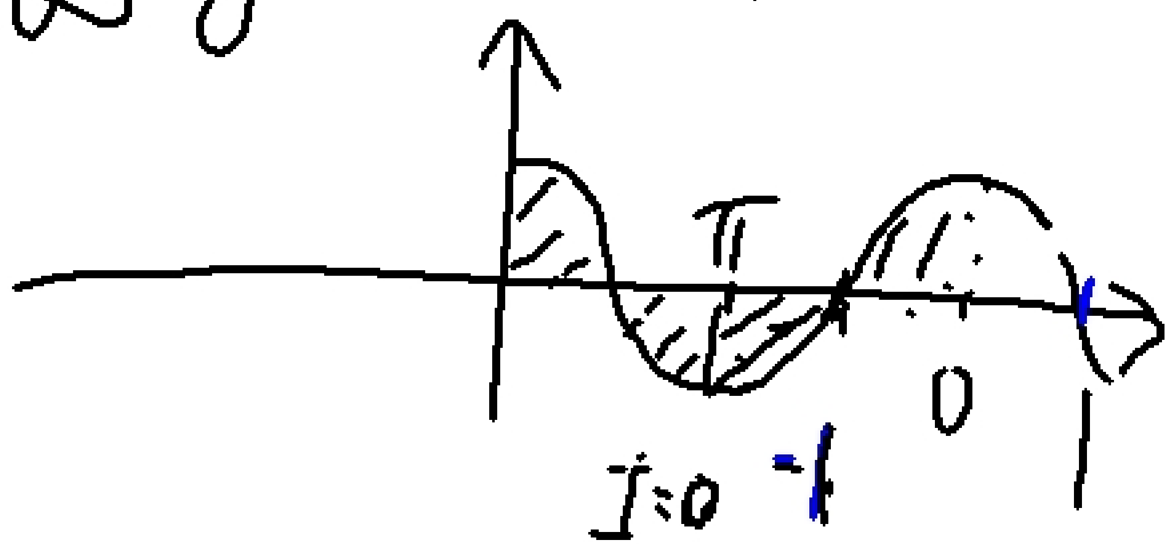
$$\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}+1\right)=1$$

Om gränsvärdet existerar är integralen <u>konvergent</u> annars <u>divergent</u>

Om grv. är ∞ $(-\infty)$ divergerar integralen mot ∞ $(-\infty)$.

<u>Ex</u> $\int_0^{\infty}\cos dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos dx = \lim_{R\to\infty}\left[\sin x\right]_0^R =$

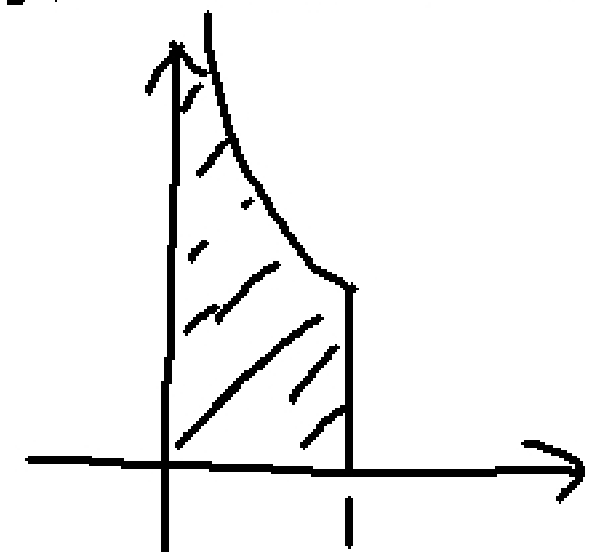
$\lim_{R\to\infty}\sin R$ divergent



Ex $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är generaliserad av typ 2.

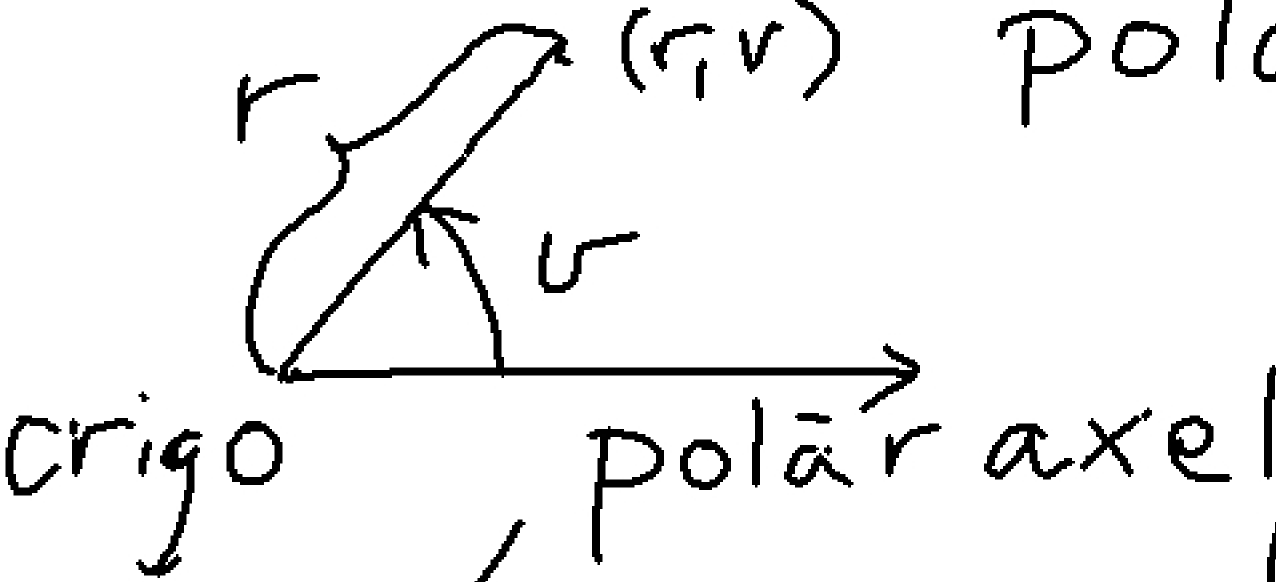
$\frac{1}{\sqrt{x}}$ är obegränsad nära 0

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{r\to 0} \int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

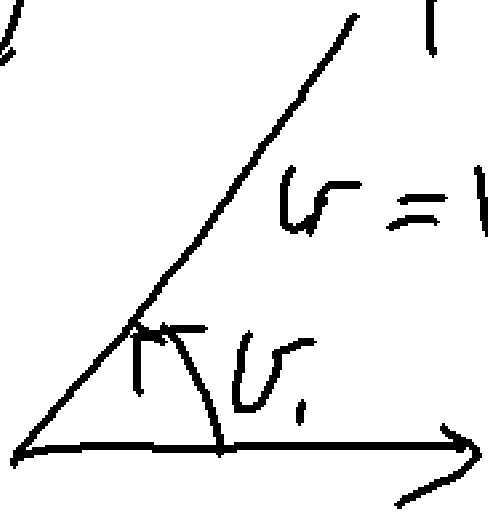


$$\lim_{r\to 0} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_r^1 = \lim_{r\to 0} \left(2 - 2\sqrt{r}\right) = 2$$

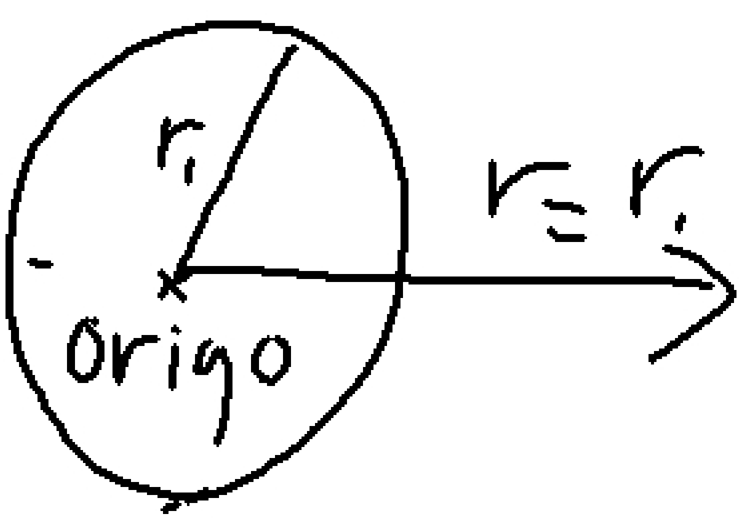
8.2B Polära koordinater



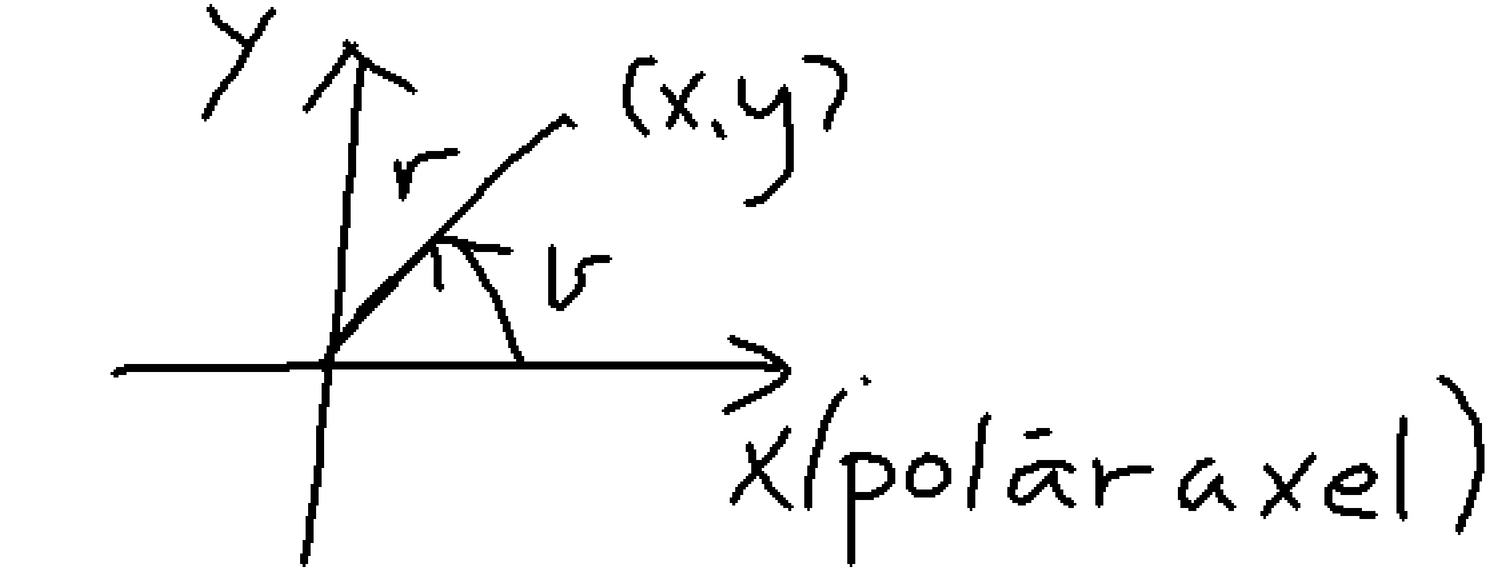
polära koordinater (r, v) där r är avståndet från origo och v vinkeln som linjen från origo till punkten bildar med polära axeln.



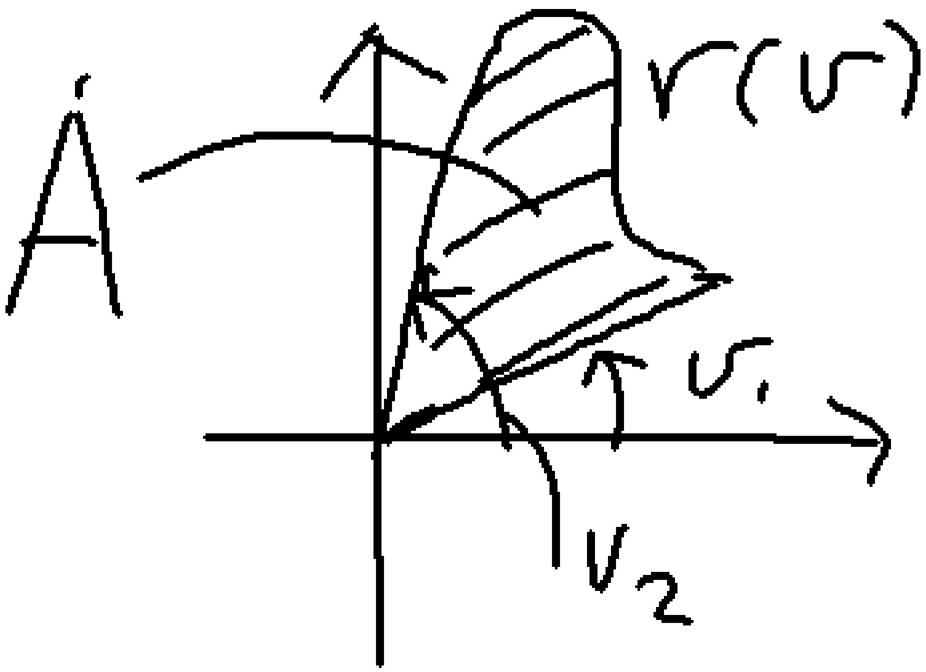
$v = v_1$ stråle från origo



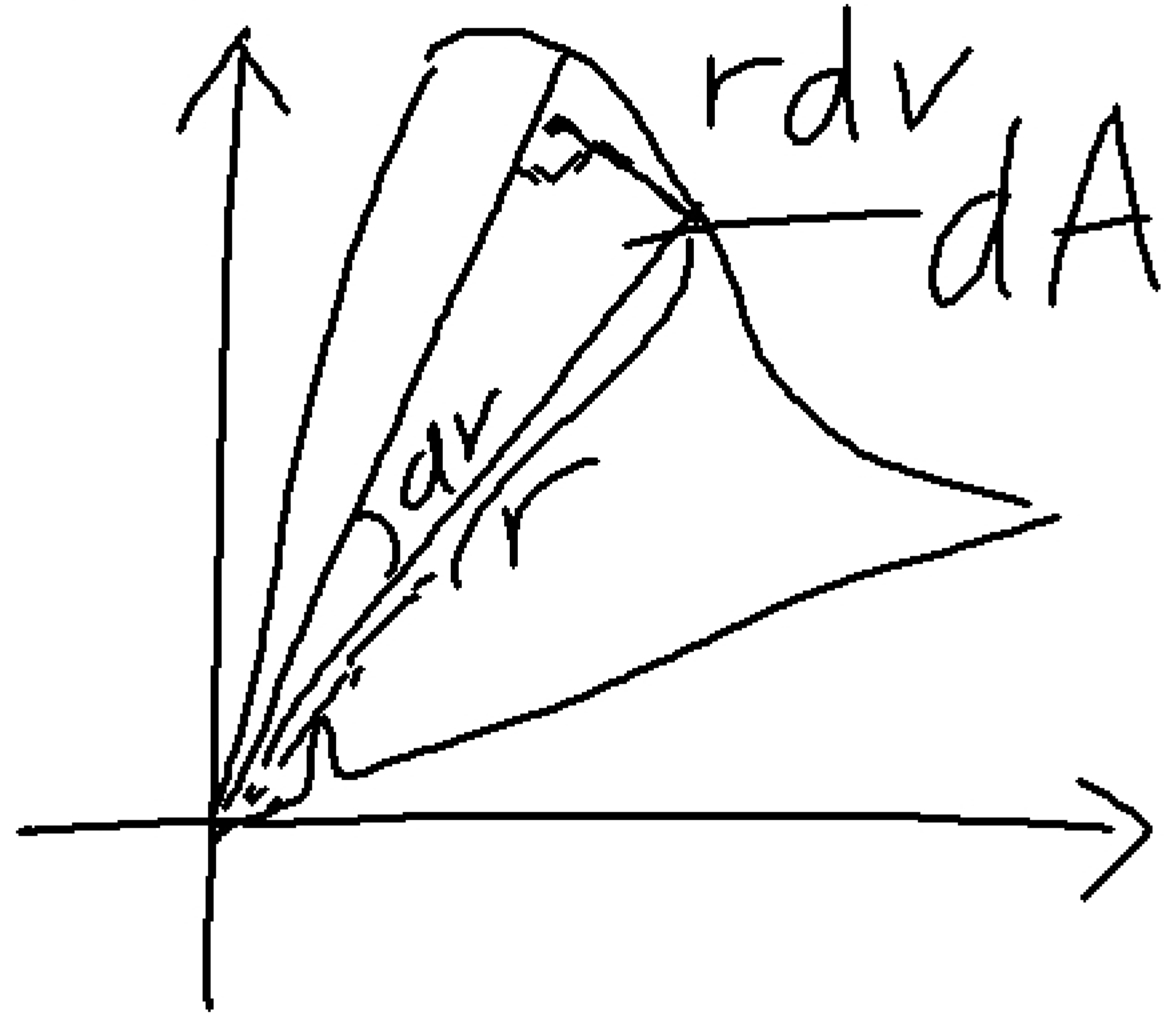
$r = r_1$ cirkel med radien r_1



$$\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$$



r=r(v) är en polär kurva.



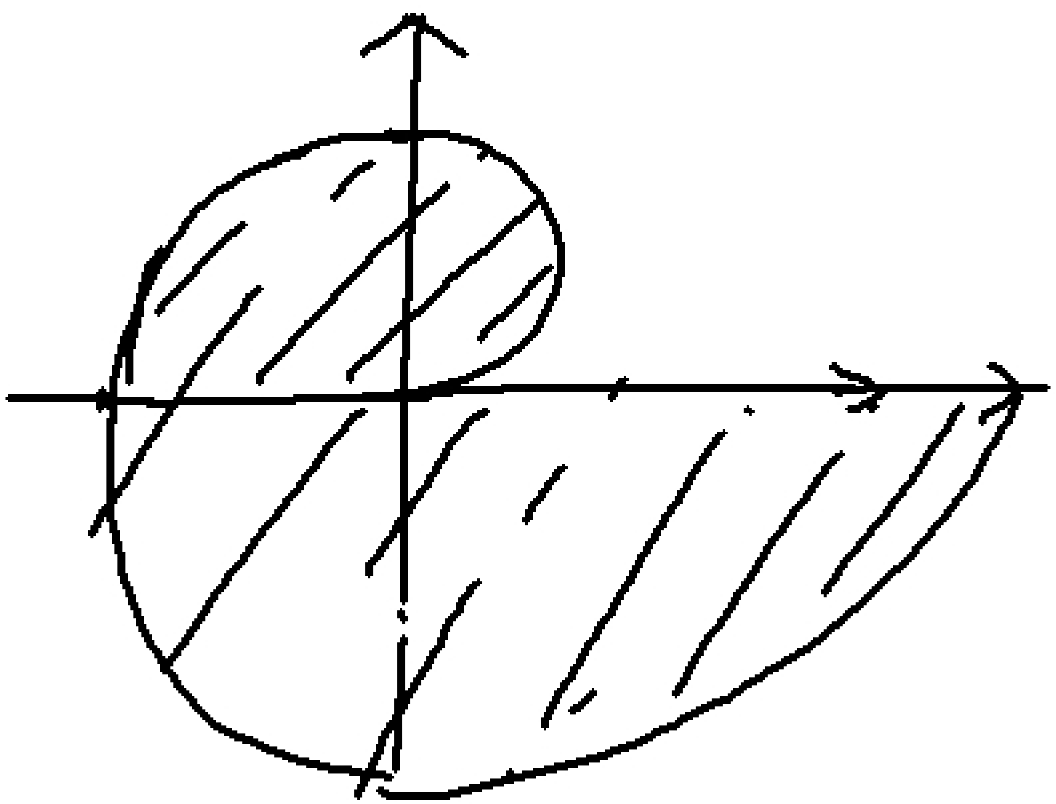
En cirkel har area πr^2.

– " –   —— " –   Sektor har area $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha}{2} r^2$ där α är medelpktsvinkeln.

Vi approximerar $dA = \frac{dv}{2} r^2$

$A = \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} r^2 \, dv$ är arean av området som begränsas av $r(v)$ och strålarna v_1 och v_2.

Ex Bestäm arean mellan origo och spiralen $r=\sqrt{v}$, $0 \le v \le 2\pi$.

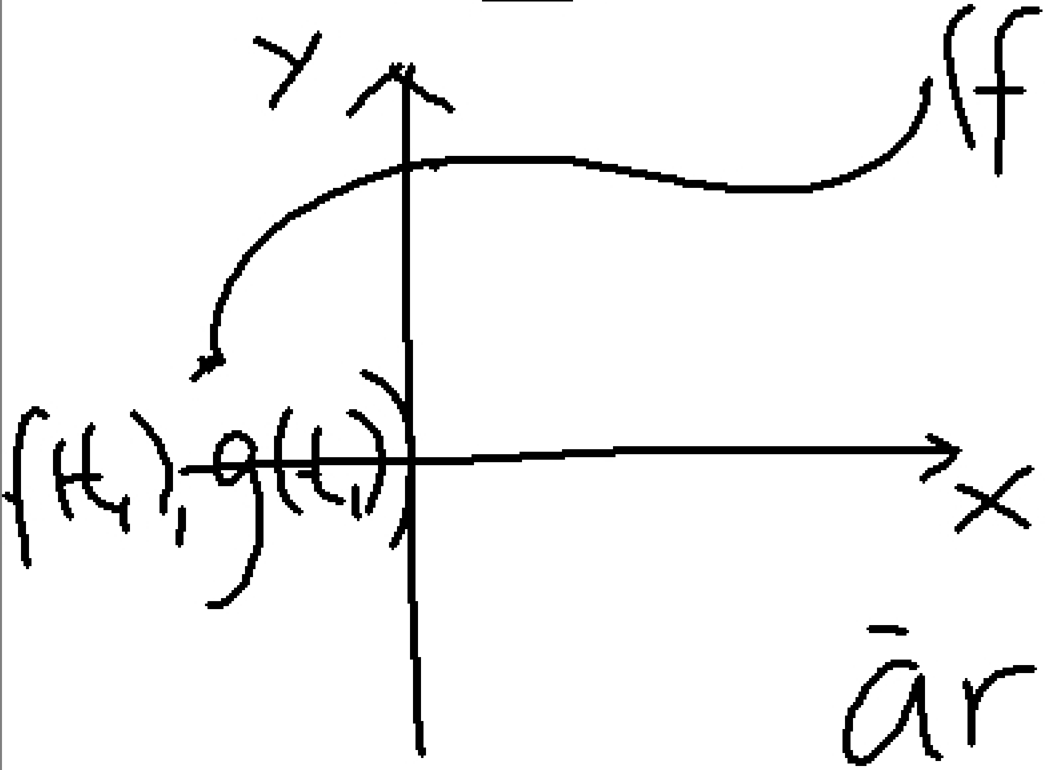


v	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
r	0	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{\pi}$	$\sqrt{2\pi}$
		$\approx 1{,}4$	$\approx 1{,}8$	$\approx 2{,}5$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{4} = \pi^2 \text{ a.e.}$$

8.3 Plana kurvors båglängd

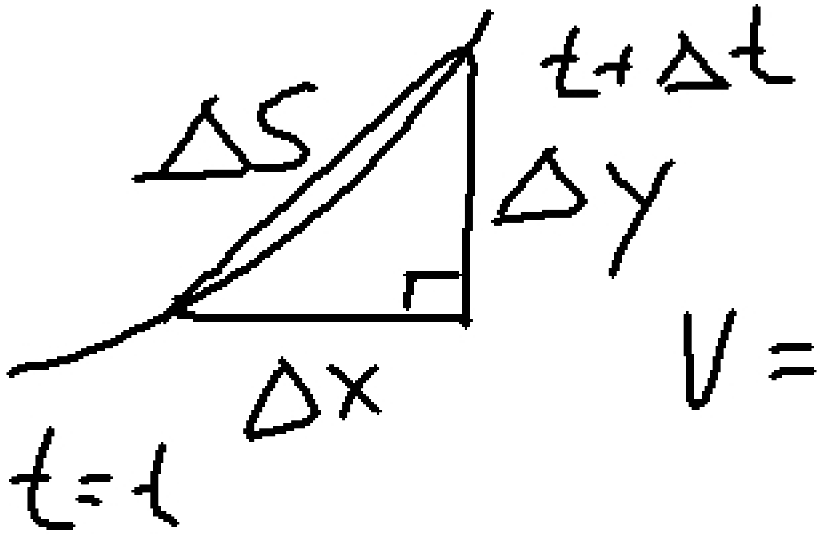


$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

är en **parameterframställning** av en kurva

och kan tolkas som en beskrivning av en partikels rörelse. $(f(t), g(t))$ är läget vid tiden t.

Farten vid tidpunkten t är $v(t)$ och kan ses som medelhastigheten under tidsintervallet $[t, t+\Delta t]$.



$$\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Båglängden $\underline{S} = \int ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt}\,dt = \underline{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \qquad v(t): \text{farten}$$

$$\left(\bar{v}, \vec{v} \ \text{hastigheten}\right)$$

Ex Bestäm längden av parameter-kurvan

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le 2. \end{cases}$$

$$x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$y'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = e^{2t}(\cos^2 t \cancel{- 2\cos t \sin t} + \sin^2 t)$$

$$+ e^{2t}(\sin^2 t \cancel{+ 2\sin t \cos t} + \cos^2 t)$$

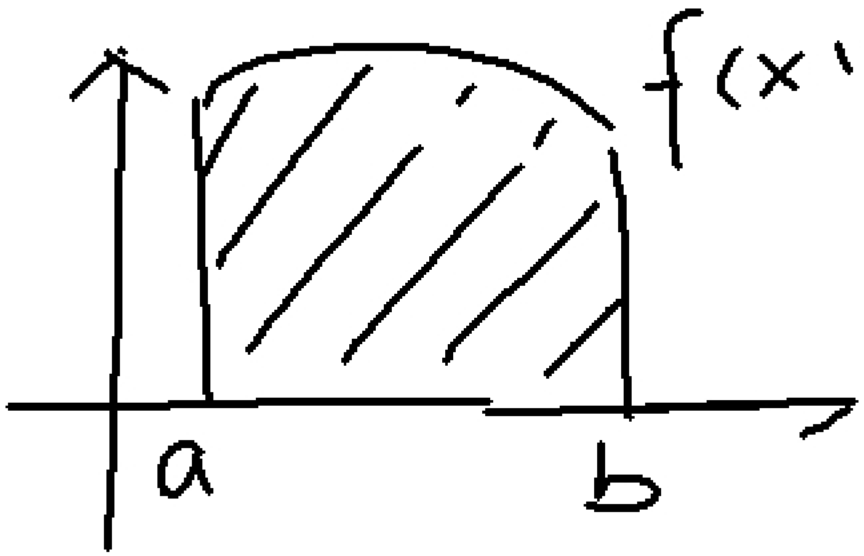
$$= 2e^{2t}$$

$$v(t) = \sqrt{2e^{2t}} = e^{t}\sqrt{2}$$

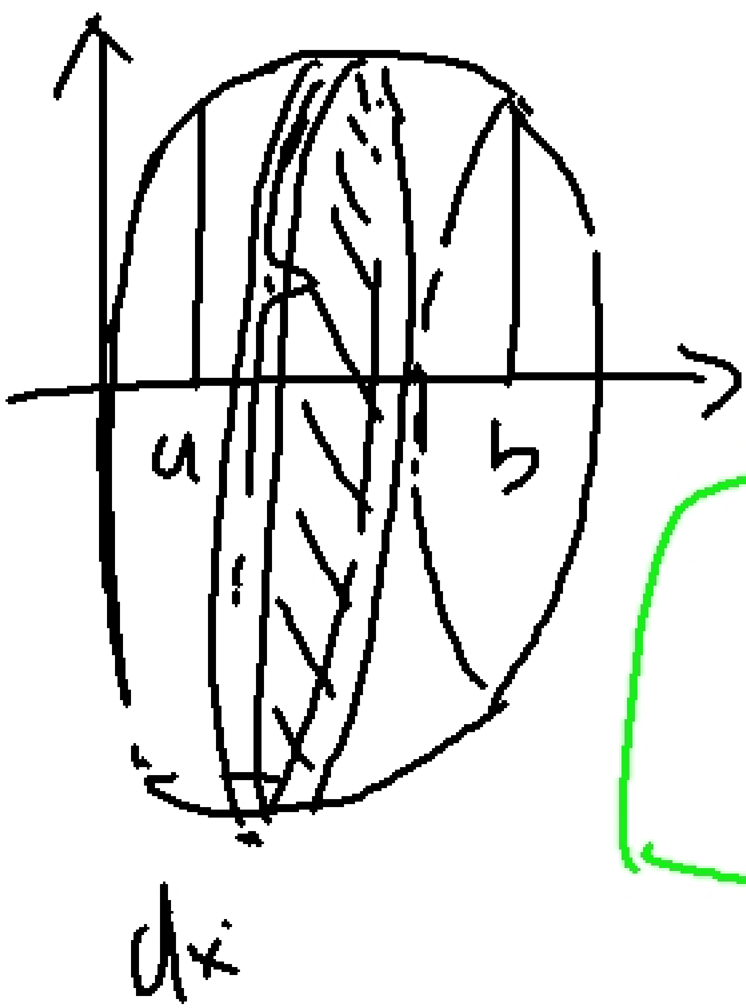
$$S = \int_0^2 |e^t| \sqrt{2}\, dt = \int_0^2 e^t \sqrt{2}\, dt = \left[\sqrt{2}e^t\right]_0^2$$

$$= \sqrt{2}e^2 - \sqrt{2}\cdot 1 = \underline{\sqrt{2}(e^2-1)} \quad \text{l.e.}$$

8.5.2 Rotationskroppars volym

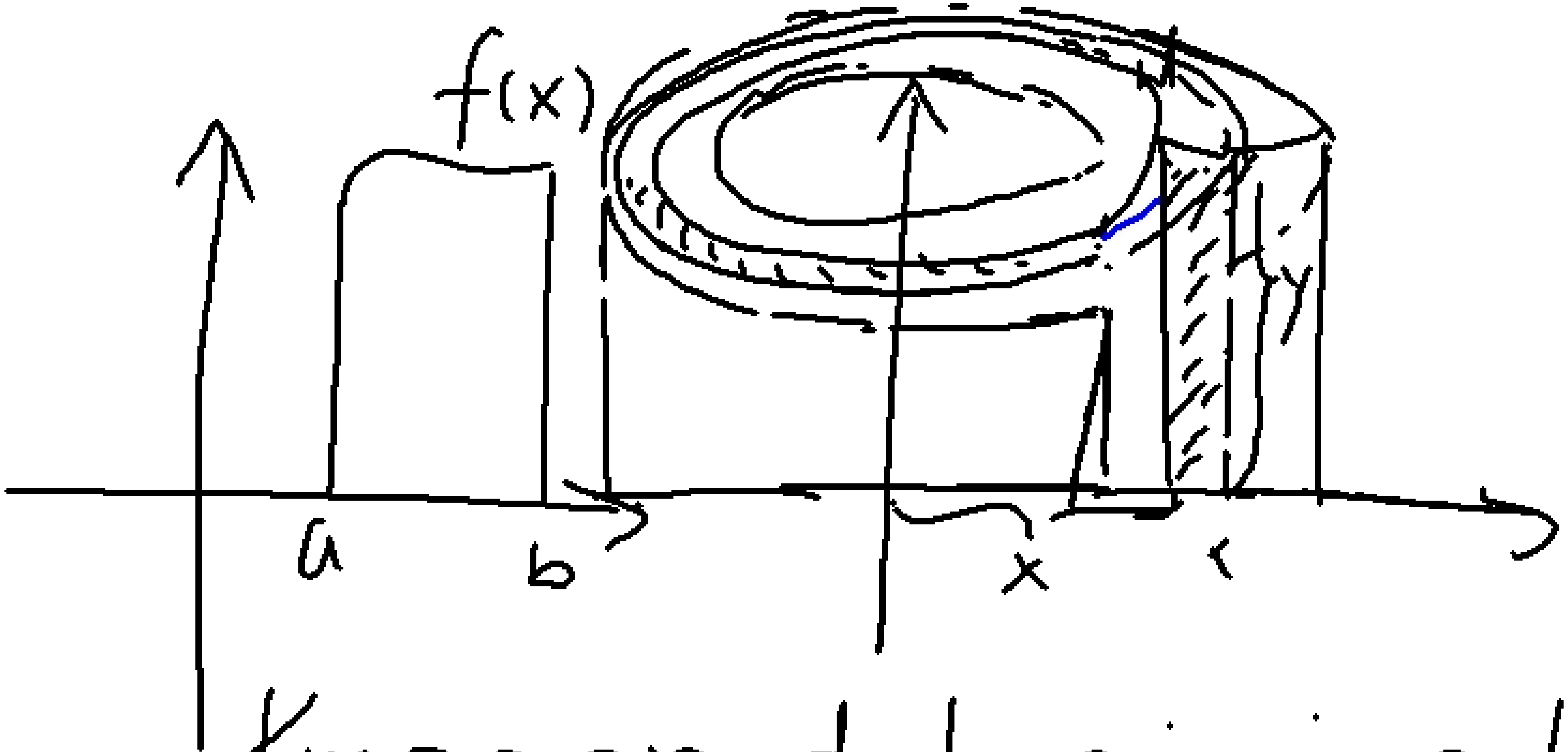


Området mellan $y=f(x)$ och x-axeln roterar kring x-axeln.



Volymen av en skiva av kroppen är $dV=\pi y^2 dx$

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx}$$



Kroppen delas in i cylindriska skal med volymen $dV = 2\pi x \cdot y \, dx$

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b xy \, dx}$$

vid rotation kring y-axeln.

Måndag 10-12 Sal 5