yhhh

29/9 12:30 i 432

LS2

Dagens 24/9 3a. Svar: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$

8. $a = 1$

22/9 2c,d,e Beräkna tangent
och norm[l] till y(x) i angiven punkt
Svar: 17/9 9c,d,e

Jour tisd torsd. 17-19 E31 KTH
23/9 E35

407d Svar $(x^3+x^2+x-1)\dfrac{e^x}{2x^2}dx$

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Sats}} \text{ Om } f(x) \text{ är deriverbar i } x=a \\ \text{är } f(x) \text{ kontinuerlig i } x=a.\end{array}}$

<u>Bevis</u> Deriverbar $\Rightarrow f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar

$$\lim_{h\to 0}\left(f(a+h)-f(a)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h=f'(a)\cdot 0=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)\text{ ; } x=a+h\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\Rightarrow f \text{ är kont i a.}$$

Kontinuerlig $\Longleftrightarrow$ Sammanhängande graf

Deriverbar fkn $\Longleftrightarrow$ ———— " ————

och "slät" graf
(entydig och icke lodrät tangent)

4.2.4 Differensformeln

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ kan skrivas om

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\lim \left(\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h}}_{\rho(h)} \right) = 0$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h} = \rho(h)$$

$$h \neq 0 \Rightarrow f(x+h)-f(x)-hf'(x) = h\rho(h)$$

$$\rho(h) \to 0 \text{ då } h \to 0 \Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{f(x+h)-f(x)}_{\Delta f} = hf'(x) + h\rho(h)$$

Differensformeln

$f(x)$ är deriverbar i punkten x om och endast om det finns ett tal A och en fkn $\rho(h)$ som $\to 0$ då $h \to 0$, sådana att $\Delta f = f(x+h)-f(x) = A \cdot h + h\rho(h)$. Talet A är då $f'(x)$.

$df = f'(x) \cdot h$ kallas

<u>differentialen</u> i punkten x.

$g(x) = x \Rightarrow dg = dx = 1 \cdot h = h$

$\Rightarrow h = dx$

$$\boxed{df = f'(x)dx}$$

$d(f \circ g) = (f \circ g)'dx = f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$

$d(fg) = (fg)'dx = (f'g + fg')dx$

<u>Ex</u> $f(x) = x^2$ $df = 2x\,dx$

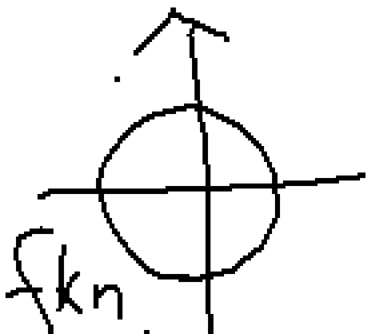
4.2.5 Implicit derivering

$f(x) = x^2$ är en <u>explicit</u> given funktion.

Antag att $y = f(x)$ är en fkn som definieras av ekvationen $F(x,y) = 0$

<u>Ex</u> $x^2 + y^2 - 25 = 0$ $\left(F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \right)$

är ekvationen för cirkeln med radie 5 och medelpunkt i origo.



Detta är inte grafen för en fkn.

$y^2 = 25 - x^2 \iff y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ två y-värden för $-5 < x < 5$

$y = \sqrt{25 - x^2}$ och $y = -\sqrt{25 - x^2}$ är funktioner som definieras <u>implicit</u> genom $F(x,y) = 0$

Ekvationen kan deriveras implicit: Sätt $y = y(x)$

$$x^2 + (y(x))^2 - 25 = 0$$

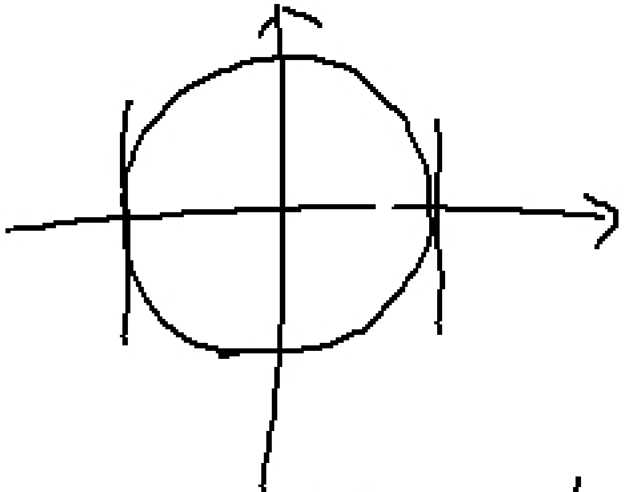
Kedjeregeln ger:

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \iff$$

$$2y(x) \cdot y'(x) = -2x$$

$$y'(x) = -\frac{2x}{2y(x)} = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

$$y = 0 \Rightarrow \lim_{y \to 0+} \frac{-x}{y} = -\infty \quad \lim_{y \to 0-} -\frac{x}{y} = \infty$$



lodrät tangent för $y=0$

<u>Ex</u> Bestäm tangenten och normalen till $x^2+y^2-25=0$ i punkten $(3,4)$.

$y' = -\frac{x}{y}$ $\quad (x,y)=(3,4) \Rightarrow y' = -\frac{3}{4}$

Linjens ekv. $\quad y = kx + l \quad k_{tang} = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + l \quad (x,y)=(3,4)$ ger

$4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + l \Leftrightarrow 4l = 16+9 = 25 \Leftrightarrow$

$l = 25/4 \quad$ tang ekv: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

$$4y + 3x = 25$$

$$k_{norm} = -\frac{1}{y'} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x + l \quad (3,4) = (x,y) \Rightarrow$$

$$4 = \frac{4}{3} \cdot 3 + l \Leftrightarrow l = 0$$

$y = \frac{4}{3}x$ normalens ekvation

Logaritmisk derivering

Ex $y = x^x$ Logaritmera

$$\ln y = \ln x^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln x$$

Derivera implicit

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Longleftrightarrow$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

4.4 Högre derivator

$f'(x)$ är också en funktion. Dess derivata betecknas $f''(x)$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, D^2f och kallas andraderivatan av f.

n:te derivatan betecknas $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^nf}{dx^n}$, D^nf

Räkneregler $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$

$(cf)^{(n)} = c \cdot f^{(n)}$, c konstant

Ex Bestäm $\frac{d^2y}{dx^2}$ då $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Derivera implicit med avseende på x:

$y = y(x)$

$$2x + 2y \cdot y' - 2 = 0 \iff$$

$$2yy' = 2 - 2x \iff$$

$$y' = \frac{2-2x}{2y} \iff y' = \frac{\cancel{2}(1-x)}{\cancel{2}y} = \frac{1-x}{y}$$

Derivera implicit: $y'' = \frac{-1 \cdot y - (1-x)y'}{y^2}$

$$y'' = \frac{-y - (1-x)\cdot\frac{(1-x)}{y}}{y^2} \iff$$

$$y'' = \frac{y\left(-y - \frac{(1-x)^2}{y}\right)}{y \cdot y^2}$$

$$y'' = \frac{-y^2 - (1-x)^2}{y^3} = \frac{-y^2 - (1 - 2x + x^2)}{y^3}$$

$$y'' = \frac{-y^2 - 1 + 2x - x^2}{y^3}$$