4.5.1 Monotona funktioner

$f(x)$ är **växande**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f(x)$ är **avtagande**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$f(x)$ är **strängt växande**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Strängt avtagande: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

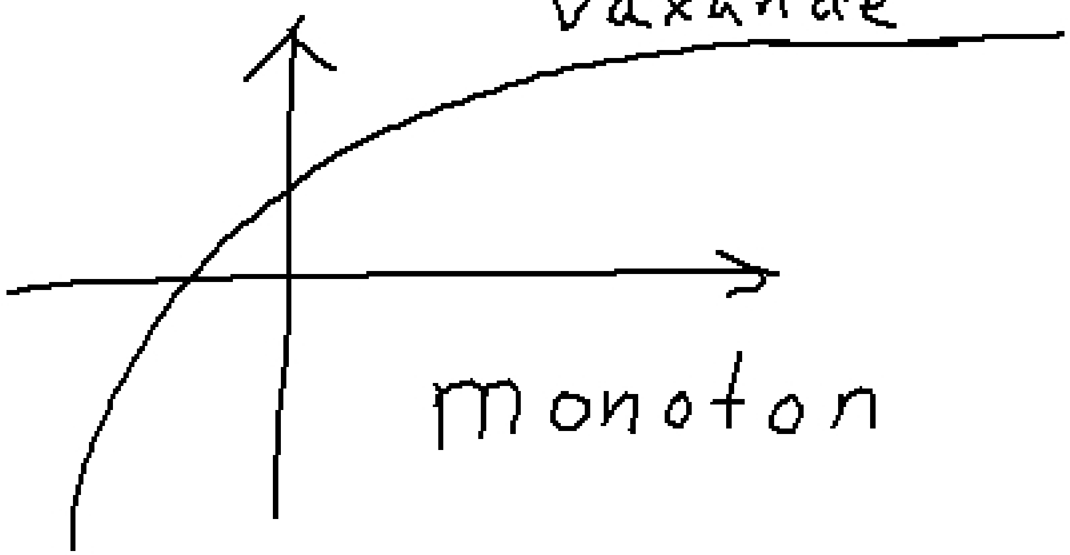
$f(x)$ är **monoton** om $f(x)$ är växande för alla x i D_f

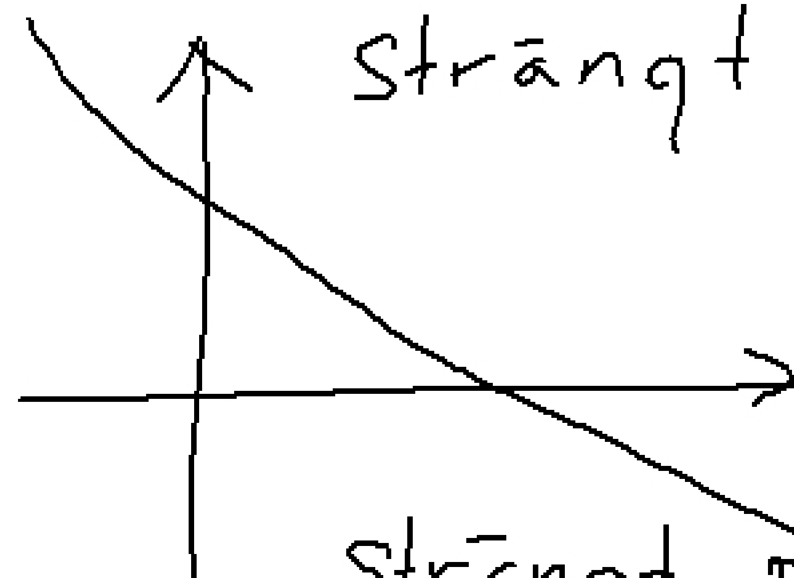
—— " —— avtagande —— " ——

$f(x)$ är **strängt monoton** om $f(x)$ är $\left.\begin{array}{l}\text{strängt växande}\\ \text{strängt avtagande}\end{array}\right\}$

för alla x i D_f.

$f(x)$ är inverterbar på D_f om den är strängt monoton.





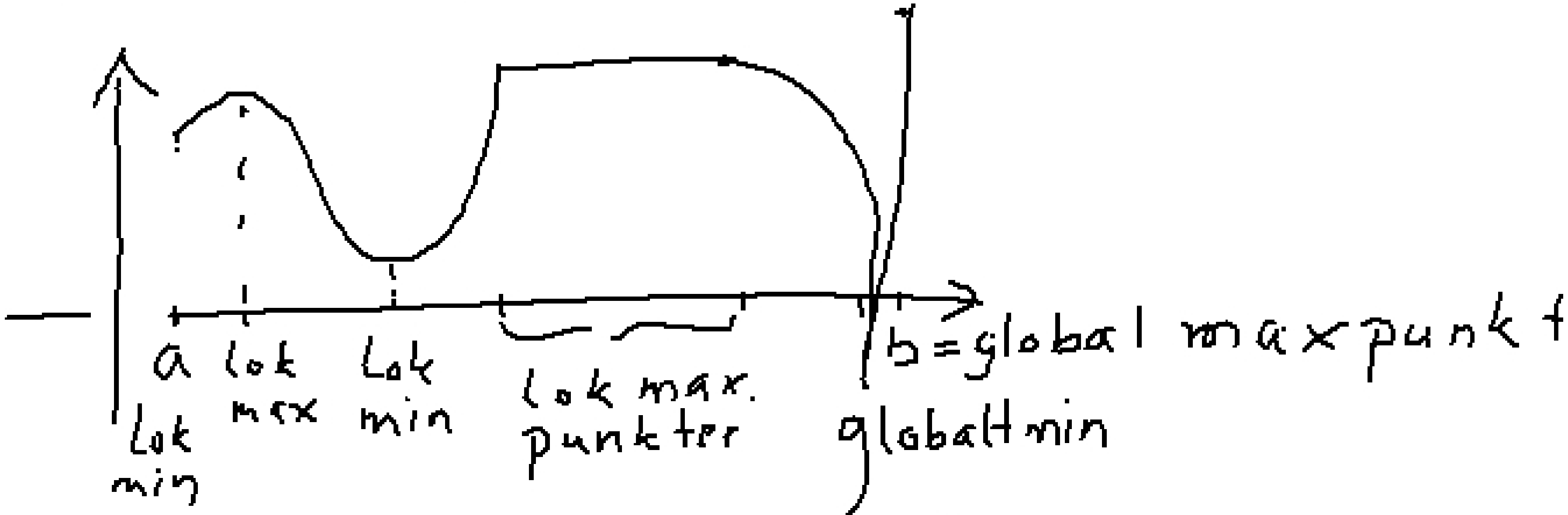
$x = x_0$ är en <u>lokal maximipunkt</u> om $f(x) \le f(x_0)$ för
<u>lokal minimipunkt</u> $f(x) \ge f(x_0)$

alla x i någon omgivning till x_0

$f(x_0)$ kallas maximivärde
minimivärde

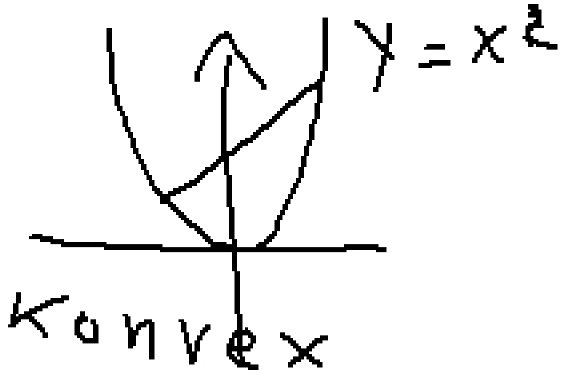
Om $f(x_0) \le f(x)$ för alla x i D_f är x_0 en global
min punkt $f(x_0) \ge f(x_0)$
maximipunkt

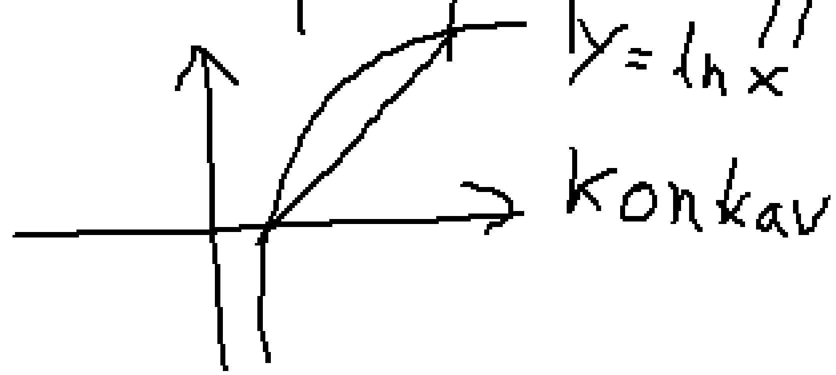
Extrempunkter: maximi- och minimipunkter



$f(x)$ är en konvex funktion om varje korda
konkav

mellan två punkter på grafen ligger ovanför grafen
under





Monotonitetssatsen

För <u>deriverbara</u> funktioner $f(x)$ definierade på ett <u>öppet</u> intervall (a,b) gäller:

1) $f(x)$ är $\begin{Bmatrix} \text{växande} \\ \text{avtagande} \end{Bmatrix}$ på $(a,b) \Longleftrightarrow f'(x) \begin{Bmatrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{Bmatrix}$ på (a,b)

2) $f(x)$ är strängt $\begin{Bmatrix} \text{växande} \\ \text{avtagande} \end{Bmatrix}$ på $(a,b) \Longleftrightarrow f'(x) \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$ på (a,b)

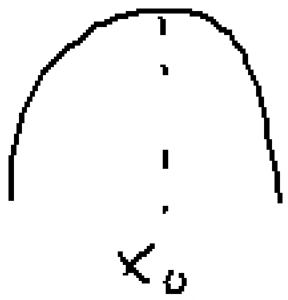
3) $f(x)$ är konstant på $(a,b) \Longleftrightarrow f'(x) = 0$ på (a,b)

4) x_0 är en lokal extrempunkt $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

5) $f(x)$ är $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$ på $(a,b) \Longleftrightarrow f''(x_0) \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$ på (a,b)

6) Om $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix}$ är x_0 en lokal $\begin{Bmatrix} \text{min} \\ \text{max} \end{Bmatrix}$ punkt

Bevis av x_0 lokal extrempunkt $\Rightarrow f'(x_0)=0$.



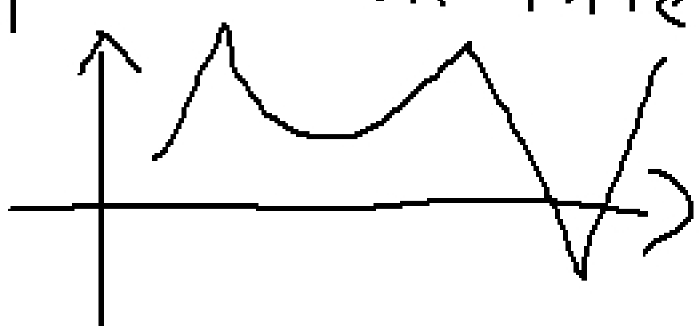
$f(x)-f(x_0)\le 0$ för alla x i en omg. av x_0

$x<x_0$ $\quad x-x_0<0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$

$x>x_0$ $\quad x-x_0>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \Rightarrow f'(\quad)=0$$

Styckvis deriverbara funktioner är definierade och kontinuerliga på ett intervall, men det finns eventuellt ett ändligt antal punkter där funktionen inte är deriverbar.



Sats Om x_0 är en lokalextrempunkt till $f(x)$ som är definierad på ett **slutet** intervall så gäller:

1. $f'(x_0) = 0$,
2. x_0 är en randpunkt (ändpunkt) till $[a,b]$

eller 3. f är inte deriverbar i x_0 (singulärpunkt)

1., 2, 3 kallas **kritiska punkter**

Förstaderivatatestet

Inre kritiska punkter ($f'(x_0) = 0$ eller ~~en~~ singulär punkt)

(c,d) är ett öppet intervall som innehåller x_0.

x	c	x_0	d	Karaktär hos x_0
$f'(x)$	+		−	Lokal maximi
$f'(x)$	−		+	−〃− minimipunkt

Randpunkter

$D_f = [a, b]$ och är kontinuerlig i a och b.

x	a	c	d	b	karaktär
$f'(x)$		+			lokalt min
		−			−"− max
			+		lok. max
			−		lok. min

Ex Bestäm extremvärden till $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ på $[-2, 2]$.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\iff x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$$

$f(0) = -3$ $f(1) = -4$ $f(-1) = -4$

Inga singulära punkter

Ändpunkter: $f(-2) = 16 - 8 - 3 = 5$ $f(2) = 5$

x	-2 $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2
x	$-\ -\ -\ 0\ +\ +\ +$
$x+1$	$-\ 0\ +\ +\ +\ +\ +$
$x-1$	$-\ -\ -\ -\ -\ 0\ +$
$f'(x)$	$-\ 0\ +\ 0\ -\ 0\ +$
$f(x)$	lok max $\searrow$ lok min $\nearrow$ lok max $\searrow$ lok min $\nearrow$ lok max

$f(-2) = 5$
$f(2) = 5$ } lokala och globala max.värden

$f(0) = -3$ lokalt maximivärde

$f(-1) = -4$
$f(1) = -4$ } lok ock globala minivärden

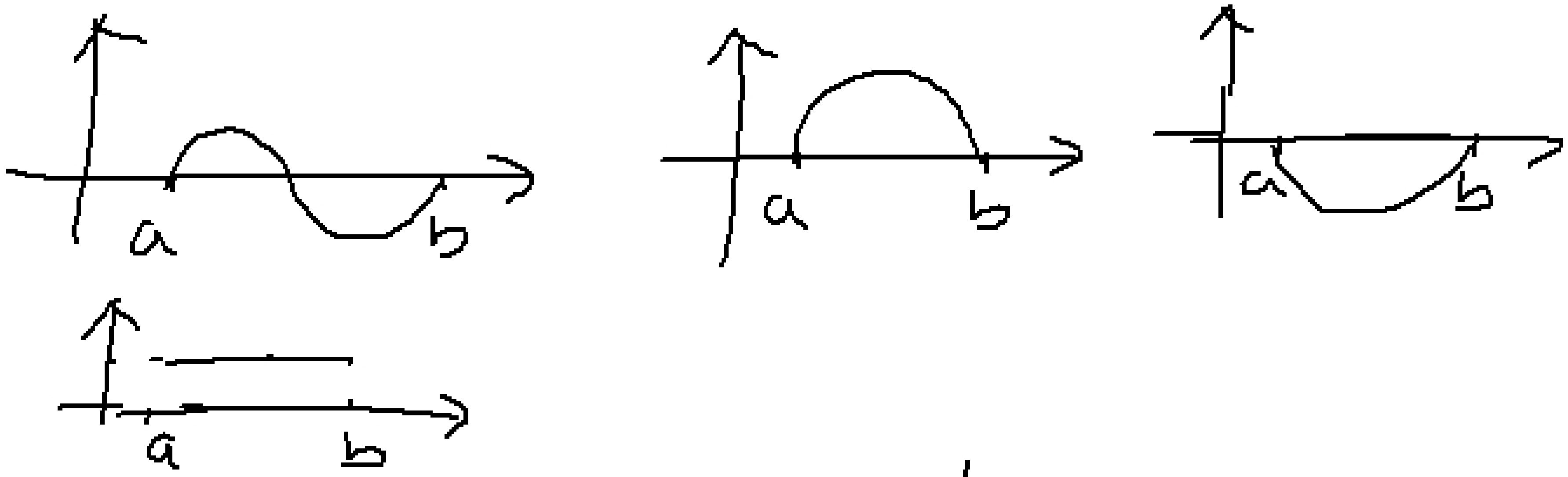
Rolles sats

Om $f(x)$ är

1) deriverbar på (a,b) och
2) kontinuerlig för $x=a$ och $x=b$ och
3) $f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow$ $f'(x)$ har minst ett nollställe på (a,b)

Bevis Satsen om extremvärden ger att $f(x)$ har ett största och ett minsta värde på $[a,b]$.
Då gäller antingen att både största och minsta värdet finns i a och b. $f(a)=f(b) \Longrightarrow$ $f(x)$ är konstant. Eller max eller min finns i en inre punkt $x_0 \Longrightarrow f'(x_0)=0$



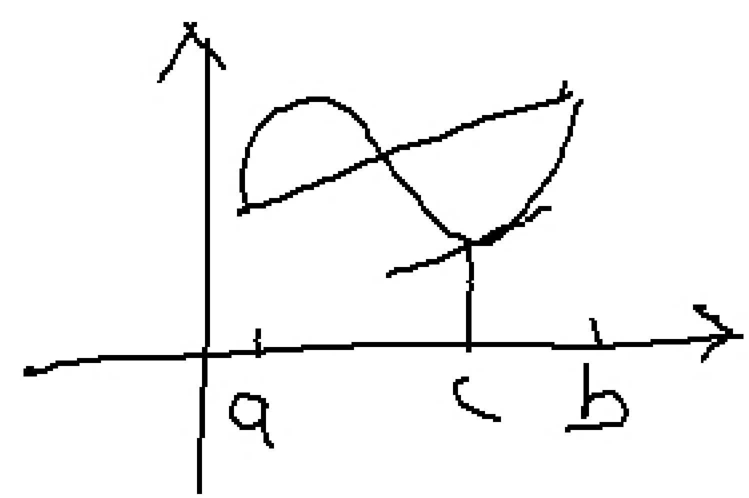
Medelvärdessatsen

1) $f(x)$ är deriverbar på (a,b),

2) — " — kontinuerlig i $x=a$ och $x=b$

$\Rightarrow$ det finns ett tal c på (a,b) sådant att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



__Bevis__ Låt $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Visa att $f'(x)$ antar värdet k.

Låt $F(x) = f(x) - f(a) - k(x-a)$

$F(a) = f(a) - f(a) - k(a-a) = 0$

$F(b) = f(b) - f(a) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}}_{k}\cdot(\cancel{b-a}) = 0$

$F'(x) = f'(x) - k$

$F(x)$ är deriverbar

Rolles sats ger att det finns en punkt c på (a,b) sådan att $F'(c)=0$ dvs

$F'(c) = f'(c) - k = 0 \Leftrightarrow f'(c) = k = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dvs

29/9 8–10 i sal 5

Ls. 4

Ls 2 12^{30} 29/9 i sal 432