1.2.1 Aritmetiska serier

$$A = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d)$$

är en <u>aritmetisk serie</u> med n termer, första term är a och <u>seriens differens</u> är d.

$$A = a + (a+d) + \cdots + (a+(n-2)d) + (a+(n-1)d)$$

$$+ (A = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \ldots + (a+d) + a)$$

$$2A = a+a+(n-1)d + (a+a+(n-1)d) + \ldots + (a+a+(n-1)d) + (a+a+(n-1)d)$$

$$2A = n(a+a+(n-1)d) \Leftrightarrow \boxed{A = n\frac{a+a+(n-1)d}{2}}$$

A är summan av en aritmetisk serie

Ex $1+3+5+\ldots+99$

$a=1 \quad d=3-1=2 \qquad 99=1+(n-1)\cdot 2$

$98=2n-2 \Leftrightarrow$

$2n=100$

$n=50$

$A=50\cdot\frac{1+99}{2}=50\cdot 50=2500$

1.2.2 Geometriska serier

En geom. serie $G = a + ak + \dots + ak^{n-1}$
har summan $G = a \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$, $k \neq 1$
k kallas seriens kvot. $G = n \cdot a$, $k = 1$

Härledning:

$$
\begin{array}{l}
G = a + ak + \dots + ak^{n-1} \\
-(Gk = \phantom{a +{}} ak + \dots + ak^{n-1} + ak^n) \\
\hline
G - Gk = a - ak^n \Leftrightarrow G(1-k) = a(1-k^n)
\end{array}
$$

$k \neq 1$ $\quad G = a\frac{1-k^n}{1-k}$

$k=1 \quad G = a + a\cdot 1 + a\cdot 1^2 + \dots + a\cdot 1^{n-1} = na$

9.1 Oändliga serier

<u>Def.</u> $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ är en <u>oändlig talföljd</u>. Då kallas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ en <u>oändlig serie</u>.

$a_1, a_2, \dots$ kallas <u>seriens termer</u>

$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$ kallas en <u>partialsumma</u>.

Seriens summa $s = \lim_{N\to\infty} S_N$.

Om s är ett tal är serien <u>konvergent</u> annars <u>divergent</u>.

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$

$S_N = N \qquad S = \lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N\to\infty} N = \infty$

Serien är divergent.

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$S_1 = 1 \quad S_2 = 1 - 1 = 0 \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

$S_{2N} = 0 \quad S_{2N+1} = 1 \qquad \lim_{N\to\infty} S_N$ existerar inte

Serien är divergent

Den oändliga geometriska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^n \begin{cases} = \dfrac{a}{1-k} \text{ om } |k|<1 \\ \text{divergent om } |k| \geq 1 \end{cases}$$

Bevis $k=1 \Rightarrow G_N = a \cdot N \Rightarrow S = \lim_{N\to\infty} G_N = \infty$

$$G_N = a\frac{1-k^N}{1-k} = a \cdot \frac{1}{1-k} - a\frac{k^N}{1-k}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{k^N}{1-k} = \begin{cases} 0 \text{ om } |k|<1 \\ \infty \text{ eller } -\infty \text{ om } |k|>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} G_N = \begin{cases} \dfrac{1}{1-k}, \ |k|<1 \\ \infty \text{ eller} -\infty \text{ om } |k| \geq 1 \end{cases}$$

9.3 Konvergenskriterier för numeriska serier

Sats $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergenta, c konst.

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv.

$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv., $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ div.

Sats $\sum^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Anv. för att visa divergens men inte för att visa konv.

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ Bestäm om serien är konv. eller div.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{div.}$$ (sats)

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Vet inte om serien är konv

$$S_N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}} > \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \infty \Longrightarrow \text{serien är div.}$$

9.3.2. Positiva serier

Sats En positiv serie är konv $\iff$

$$\lim_{N\to\infty} s_N < \infty.$$

Majorantprincipen

$$0 \le a_n \le b_n \implies \begin{cases} \sum^{\infty} b_n \text{ konv} \Rightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konv.} \\ \sum^{\infty} a_n \text{ div.} \Rightarrow \sum^{\infty} b_n \text{ div} \end{cases}$$

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+2}$ $\quad a_n = \dfrac{3}{4^n+2} < \dfrac{3}{4^n}$ $\quad b_n = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$\sum^{\infty} b_n$ geom. serie med $k = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ konv.

$\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ konv. Majorantprinc.

Cauchy's integralkriterium

$f(x)$ är positiv och avtagande $\forall n \Rightarrow \sum^{\infty} f(n)$ och $\int^{\infty} f(x)\,dx$ är båda konv. eller båda div.

$$\boxed{\text{Sats } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ är konv. om } \alpha > 1, \text{ div. om } \alpha \leq 1}$$

Jämförelseprincipen

1) $a_n > 0,\ b_n > 0$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är båda konv. eller båda div.