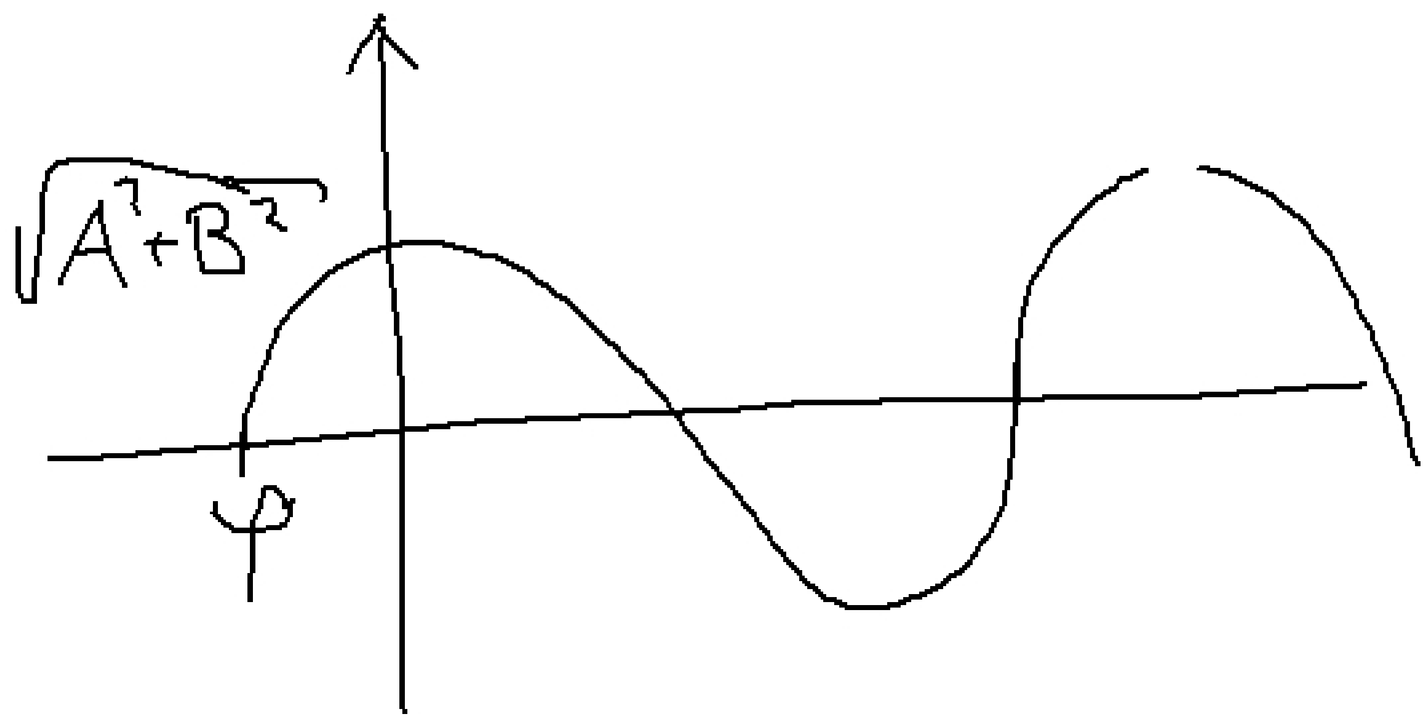
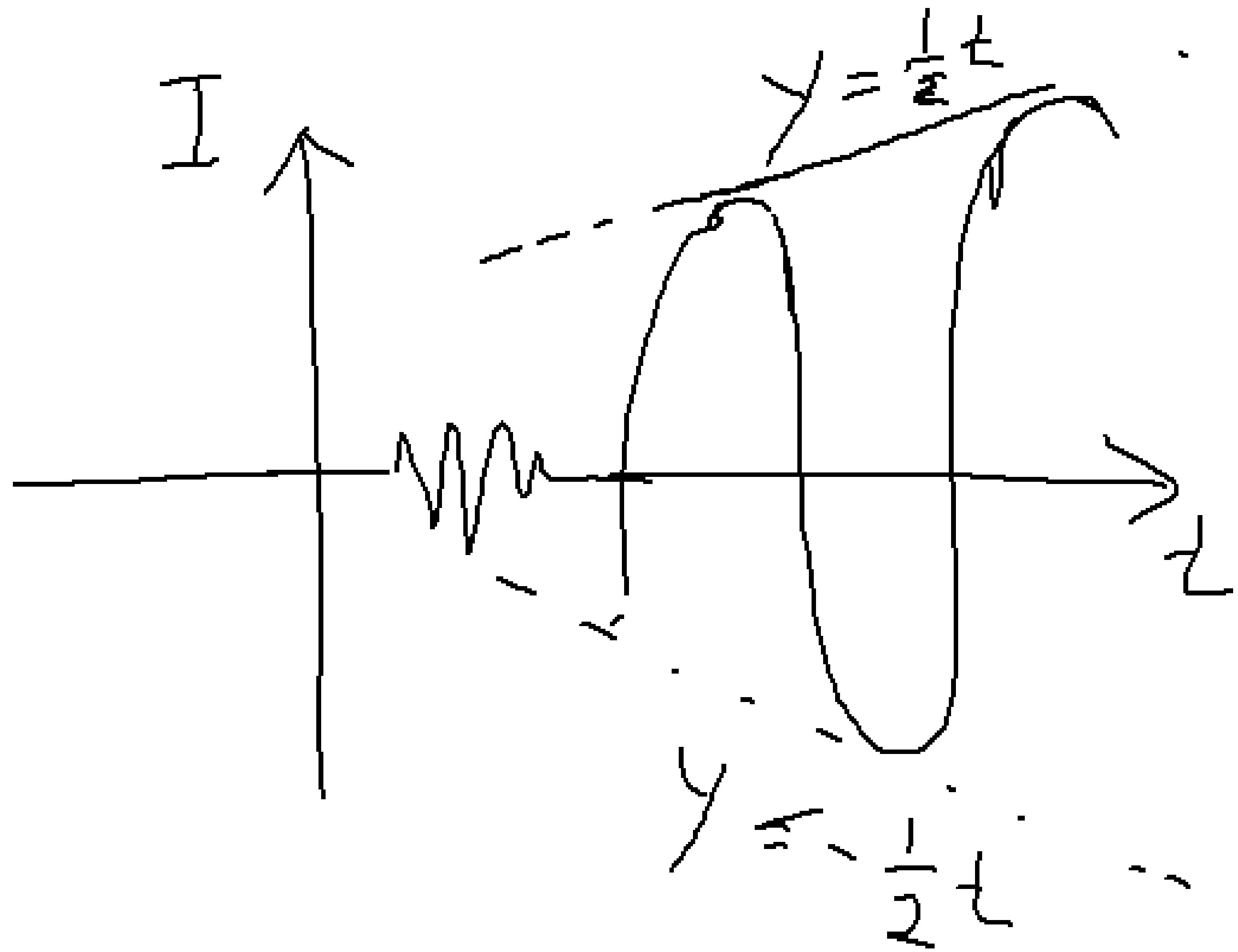
$$y_h = A\cos t + B\sin t$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos t \sin \varphi + \sin t \cdot \cos \varphi\right)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(t+\varphi)$$



$$y = \frac{1}{2} t \sin t + \sqrt{A^2 + B^2} \sin(t + \varphi)$$



svängning
med växande
amplitud

6.4 Operatorer

$$Dy = y' \quad D^2 y = y'' \quad D^n y = y^{(n)}$$

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

$$L(D) = \left(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right) y$$

$L(D)$ kallas en <u>operator</u> och <u>opererar</u> på y.

Def $(L_1(D) \pm L_2(D))y$

$= L_1(D)y \pm L_2(D)y$

$(L_1(D) \cdot L_2(D))y = L_1(D)[L_2(D)y]$

Ex $L_1(D) = D - 1 \quad (y' - y)$

$L_2(D) = D + 2 \quad (y' + 2y)$

$(L_1(D) \cdot L_2(D))y = (D-1)[(D+2)y]$

$= (D-1)(Dy + 2y) =$

$D^2y + 2Dy - Dy - 2y$

$(D^2 + D - 2)y$

$D^2 + D - 2 = (D-1)(D+2)$

Jämför med $r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$

På samma sätt kan $L(D)$ faktoriseras

$L(D) = (D-r_1)(D-r_2)\cdots(D-r_n)$

där $r_1, r_2, \ldots, r_n$ är komplexa rötter till $L(r) = 0$.

Bevis av förskjutningsregeln

$L(e^{kx} z) = e^{kx} L^*(z)$ där

$L^*(r) = L(r+k)$

$(D-r)y = y' - ry =$ ...

$\left[y = ze^{kx} \Rightarrow y' = z' e^{kx} + kze^{kx} \right]$

$z' e^{kx} + kze^{kx} - r \cdot ze^{kx} =$

$z' e^{kx} + (k-r) ze^{kx} =$

$$e^{kx}(z' + (k-r)z) =$$

$$= e^{kx}(D + (k-r))z$$

$$(D-r)(ze^{kx}) = e^{kx}(D+k-r)z$$

$$L(D)(e^{kx}z) =$$

$$(D-r_n) \cdots\cdots (D-r_2)[(D-r_1)(e^{kx}z)]$$

$$= (D-r_n) \cdots\cdots (D-r_2)[(e^{kx}(D+k-r_1)z]$$

$$= (D-r_n) \cdots\cdots [e^{kx}(D+k-r_2)(D+k-r_1)z]$$

$$= \vdots$$

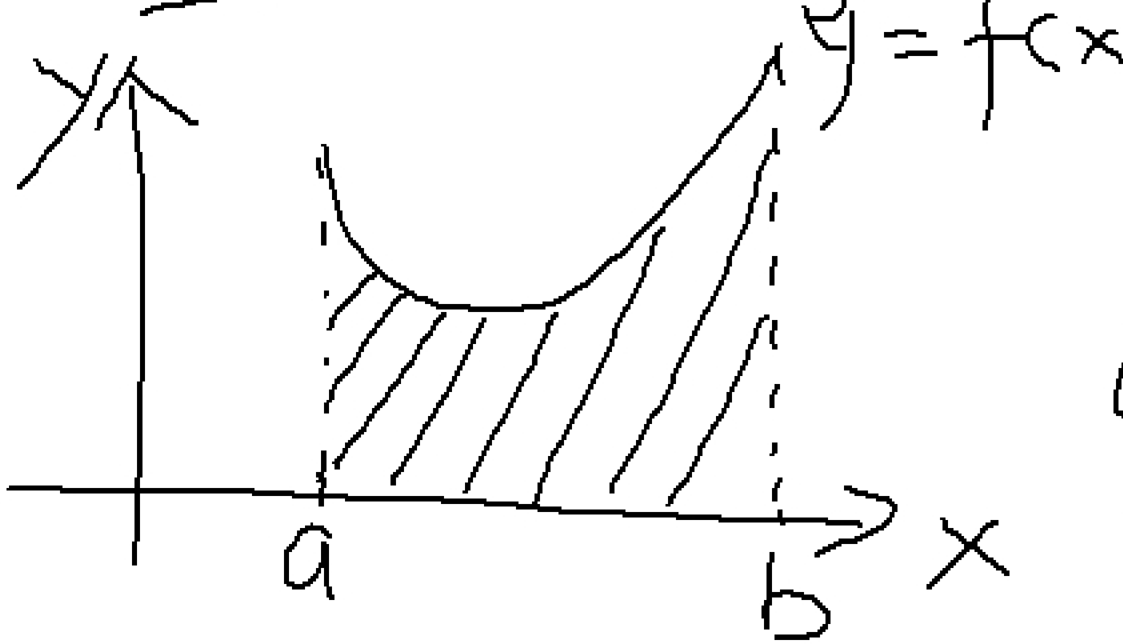
$$e^{kx}(D+k-r_n)\cdots(D+k-r_2)(D+k-r_1)z =$$

$$= e^{kx} L(D+k) z$$

Det transformerade uttrycket har kar. ekv.

$$L^*(r) = L(r+k)$$

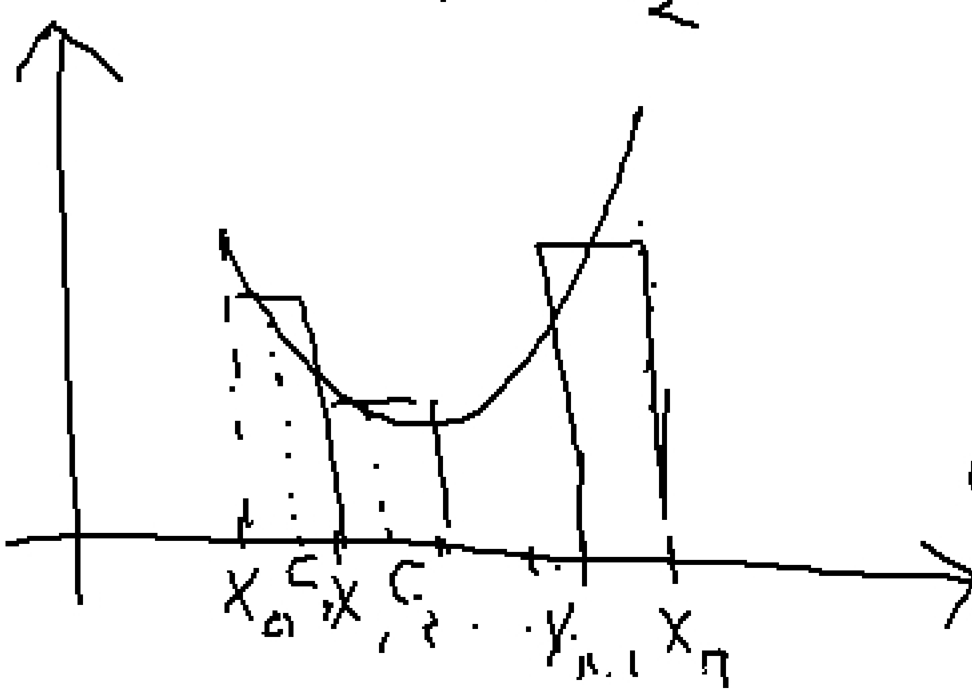
7. Integraler



Vi vill bestämma arean av det streckade området

Delain [a,b] i delintervall

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$



Välj c_i på $[x_{i-1}, x_i]$

Bilda rektanglar så att $f(c_i)$ är höjden i rekt.

Summan av rektanglarnas area: $S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(c_i)$

Sätt $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(c_i)$

kallas en Riemannsumma till $f(x)$. Den största av Δx_i dvs $\max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$ kallas indelningens <u>diameter</u> D_n.

Def. Om $\lim_{n\to\infty} S_n$ konvergerar

då $\lim_{n\to\infty} D_n = 0$ så är $f(x)$

(Riemann)integrerbar på $[a,b]$

och gränsvärdet skrivs $\int_a^b f(x)\,dx$

och kallas integralen av f över $[a,b]$.

Om $f(x) \geq 0$ på $[a,b]$ är integralen

arean av området mellan x-axeln och kurvan

på $[a,b]$.

Om $f(x)$ är styckvis kontinuerlig och begränsad på $[a,b]$ är $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$.

$f(x)$ är begränsad om det finns ett heltal N så att $|f(x)| < N$ på $[a,b]$.

Integralkalkylens huvudsats

Om $F'(x)$ är integrerbar så gäller

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Om $F'(x) = f(x)$ kallas $F(x)$
en primitiv funktion till $f(x)$.

Mängden av primitiva funktioner till $f(x)$ skrivs $\int f(x)\,dx$, obestämd integral.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \;, \quad C \text{ godtycklig konstant}$$

Läs räkneregler för integraler

Tabell med primitiva fkner s.238

Lär er den

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrera båda sidor

$$\int \left(f(g(x))\right)' dx = \int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

$$\int f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

$$\int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)\,dx \\ x = a \Rightarrow t = g(a) \\ x = b \Rightarrow t = g(b) \end{array}\right]$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f'(t) \cdot dt = f(g(b)) - f(g(a))$$

Ex

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{t}\frac{1}{2}dt = \left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_{t=x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

$\boxed{Ex}$ $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}\, x\,dx =$

$$\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x^2+1} \\ t^2=x^2+1 \\ 2t\,dt=2x\,dx \\ \Rightarrow x\,dx=t\,dt \\ 0 \longrightarrow 1 \\ \sqrt{3} \longrightarrow 2 \end{array}\right]$$

$$\int_1^2 t \cdot t\,dt = \int_1^2 t^2\,dt =$$

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$