

Kapitel 5 i boken går litet väl långt när det gäller integrationsteknik. Vi inskränker oss till följande:

*Rationella funktioner*

Vi bryr oss inte om fallet då det finns en faktor  $(x^2 + ax + b)^n$  med  $n > 1$  i nämnaren (där polynomet saknar reella nollställen.) För fallet  $n = 1$  är det bekvämt att kunna litet utantill: säg att vi har en term

$$\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$$

som skall integreras. Vi delar upp den så här:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} = \frac{A}{2} \frac{2x + a}{x^2 + ax + b} + \frac{2B - Aa}{2} \frac{1}{x^2 + ax + b}$$

Här är nu

$$\int \frac{2x + a}{x^2 + ax + b} = \ln(x^2 + ax + b)$$

För att integrera den andra termen kvadratkompletterar vi i nämnaren:

$$\frac{1}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{(x + c)^2 + d^2}$$

som har primitiven

$$\int \frac{1}{(x + c)^2 + d^2} dx = \frac{1}{d} \arctan\left(\frac{x + c}{d}\right)$$

*Rotuttryck*

Om man har ett rotuttryck  $\sqrt{\text{andragrads-polynom}}$ , där polynomet saknar reella nollställen, så kan man efter kvadratkomplettering och variabelsubstitution åstadkomma att man har ett av fallen

$$(1) \quad \sqrt{1 - x^2}$$

$$(2) \quad \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(3) \quad \sqrt{x^2 - 1}$$

Vi kan då utnyttja "ettorna" för de trigonometriska och hyperboliska funktionerna:  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  och  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ . Vi kan alltså göra följande substitutioner:

$$(1) \quad x = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad dx = \cos t dt, \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos t$$

$$(2) \quad x = \sinh t, \quad t \geq 0, \quad dx = \cosh t dt, \quad \sqrt{x^2 + 1} = \cosh t$$

$$(3) \quad x = \cosh t, \quad t \geq 0, \quad dx = \sinh t dt, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \sinh t$$

### Exempel

Bestäm en primitiv till  $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$  (jämför boken exempel 22, sid. 273.) Vi gör substitutionen

$$x = \sinh t, \quad dx = \cosh t \, dt$$

och får:

$$\int \frac{dx}{(1+t^2)^{3/2}} = \int \frac{\cosh t \, dt}{\cosh^3 t} = \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh t$$

Den sista likheten här kan man gissa sig till: vi bör veta att  $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ , och varje trigonometrisk formel har en motsvarighet för hyperboliska funktioner. Vi kan nu fortsätta:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{\sinh t}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

### Trigonometriska funktioner

Här finns en hel del ad-hoc-trix som man får lära sig efter hand. Som sista utväg tar man till "tangens för halva vinkeln". Vi tittar på ett

#### exempel

Mercators kartprojektion har den stora fördelen för sjöfarare (åtminstone förr i tiden) att en fix kompasskurs är en rät linje på kartan, och kompassriktningen är densamma som vinkeln mot meridianen på kartan. När man gör en karta enligt Mercators projektion behöver man en skala på breddgrads-axeln som är en primitiv till  $\frac{1}{\cos x}$ . Vi söker alltså  $\int \frac{dx}{\cos x}$ .

Vi ser till att integrationsintervallet ligger inom  $-\pi < x < \pi$  och sätter

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Om vi tillfälligt betecknar  $v = \arctan t$  har vi alltså

$$\cos x = \cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = \frac{\cos^2 v - \sin^2 v}{\cos^2 v + \sin^2 v} = \frac{1 - \tan^2 v}{1 + \tan^2 v} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Vi får alltså

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) = \ln \left( \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right) = \ln \left( \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right) \end{aligned}$$

Den sista likheten lämnar jag som övning (elakt grin!)