KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 2004-11-08 kl 8.00–1300.
5B1135 Matematik I för I, 6p.
Förslag kortfattade till lösningar.

1. Vi kan t.ex. använda matematisk induktion. Alternativt använder vi binomialsatsen:

$$8^n - 1 = (1+7)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} 7^k \right] - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} 7^k \right] = 7 \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} 7^k \right]$$

eftersom summan efter faktotn 7 är ett heltal, visar detta att $8^n - 1$ är delbart med 7.

2. Volymen ges av integralen

$$\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \pi \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-2}{2} \right) \right]_0^\infty$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] = \underline{\underline{\frac{3\pi^2}{8}}}$$

3. Det är enklast att använda kända Maclaurin-utvecklingar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(3x) - \sin(4x^2)}{\ln(1 + 2x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x + 27x^3\, c_1(3x)) - 4x^2 - 64x^6\, c_2(4x^2)}{2x^2 + 4x^4\, c_3(2x^2)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{3 + 27x\, c_1(3x) - 4 - 64x^4\, c_2(4x^2)}{2 + 4x^2\, c_3(2x^2)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

4. Kurvans längd ges av integralen

$$\int_0^{10} \sqrt{1 + \frac{d}{dx} \cosh^2 x}\, dx = \int_0^{10} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^{10} \sqrt{\cosh^2 x}\, dx$$
$$= \int_0^{10} \cosh x\, dx = \Big[\sinh x \Big]_0^{10} = \underline{\underline{\sinh(10)}}$$

5. Låt $y = \log_x 3$. Då är $x^y = 3$. Tag ln för bägge led: $y \ln x = \ln 3$, dvs. $y = \dfrac{\ln 3}{\ln x}$. Alltså är $\underline{\underline{y'(x) = -\dfrac{\ln 3}{x\,(\ln x)^2}}}$.

6. a) Vi deriverar funktionen:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{3(4+x)-3x}{(4+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{12}{(4+x)^2}$$
$$= \frac{4-4x+x^2}{(1+x)(4+x)^2} = \frac{(2-x)^2}{(1+x)(4+x)^2} \geq 0 \text{ för } x \geq 0,$$

där likhet gäller endast för ett x-värde. Alltså är $f(x)$ växande för $x \geq 0$.

b) Eftersom $f(0) = 0$ och $f(x)$ är växande är $f(\sqrt{2}) > 0$. Härav följer att

$\underline{\underline{\ln(1+\sqrt{2}) > \frac{3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}}}.$

7. Vi gör en integral-uppskattning [en lämplig figur bör komma in här]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2}) \leq \ln(1+\frac{1}{1^2}) + \int_1^{\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$$
$$= \ln 2 + \Big[x\ \ln(1+\frac{1}{x^2})\Big]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{-2}{x^2+1}\,dx$$
$$= \ln 2 + [\underline{\underline{0}} - \ln 2] + \Big[2\arctan x\Big]_1^{\infty}$$
$$= 2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

<u>Här</u> har vi använt att $\lim_{x\to\infty} x\ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$, vilket måste bevisas. Det gör man enklast med en Maclaurinutveckling av $\ln(1+t)$:

$$\lim_{x\to\infty} x\ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\,c\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\,c\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = 0$$

Därmed är olikheten visad.

8. Vi deriverar identiteten $x^4 + y(x)^4 = 2x^2y(x)$ m.a.p. x:

$$4x^3 + 4y^3(x)y'(x) = 4xy(x) + 2x^2y'(x) \qquad (*)$$

Sätter vi in $x = 1$, $y(1) = 1$ får vi $4 + 4y'(1) = 4 + 2y'(1)$ varav följer att $y'(1) = 0$. Vi deriverar nu identiteten $(*)$ m.a.p. x:

$$12x^2 + 12y^2(x)y'(x)^2 + 4y^3(x)y''(x) = 4y(x) + 8xy'(x) + 2x^2y''(x)$$

Sätter vi här in $x = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ får vi

$$12 + 4y''(1) = 4 + 2y''(1)$$

som ger $y''(1) = -4$. Derivatan $y'(x)$ är alltså avtagande i närheten av $x = 1$, så $y'(x)$ är negativ till höger och positiv till vänster om $x = 1$, vilket innebär att $y(x)$ är avtagande till höger och växande till vänster i ett intervall kring $x = 1$, som alltså är ett lokalt maximum.

9. Differentialekvationen är separerbar:

$$
\begin{aligned}
v\,dv &= -\frac{MG\,dx}{x^2} \\
\int_{v_0}^{0} v\,dv &= -\int_R^{\infty} \frac{MG\,dx}{x^2} \\
\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{0} &= \left[\frac{MG}{x}\right]_R^{\infty} \\
\frac{v_0^2}{2} &= \frac{MG}{R} \\
v_0 &= \sqrt{\frac{2MG}{R}}
\end{aligned}
$$

10. Låt $F(t)$ vara en primitiv till integranden: $F'(t) = e^{-t^2}$. Vi har då

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt = F(2x) - F(x) \\
G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

Derivatan $G'(x)$ är alltså $=0$ då

$$
\begin{aligned}
2e^{-4x^2} &= e^{-x^2} \\
\ln 2 - 4x^2 &= -x^2 \\
\ln 2 &= 3x^2 \\
x &= \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}
\end{aligned}
$$