KTH Matematik
Harald Lang

Kortfattade lösningar till tentamen 29/11-2004
5B1135 Matematik I för ÖI.

1. Vi Maclaurinutvecklar $\arctan t = t + t^3 c(t)$ där $c(t)$ är kontinuerlig och $c(0) = -\frac{1}{3}$:

$$x^2 - x^3 \arctan\frac{1}{x} = x^2 - x^3\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}c(\frac{1}{x})\Big) = -c(\frac{1}{x}) \to -c(0) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \text{ då } x \to \infty.$$

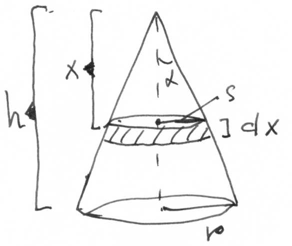
2a. Först observerar vi att $y(0) = M$. Vi deriverar map. x implicit: $y'(x) - \sin y(x) - xy'(x)\cos y(x) = 0$. För $x = 0$ får vi $\underline{\underline{y'(0) = \sin M}}$. Vi deriverar igen: $y''(x) - 2y'(x)\cos y(x) - xy''(x)\cos y(x) + x(y'(x))^2 \sin y(x) = 0$. Sätter vi nu in $x = 0$, $y(0) = M$ och $y'(0) = \sin M$ får vi $\underline{\underline{y''(0) = 2\sin M\, \cos M}}$.

2b. Vi använder definitionen av Maclaurinutveckling och resultatet i a: $y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{1}{2}x^2 y''(0) + x^3\, c(x)$ $= \underline{\underline{M + x\sin M + x^2\, \sin M\, \cos M + x^3\, c(x)}}$ där $c(x)$ är en kontinuerlig funktion.

3.
$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}\, dx &= \dots \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{bmatrix} \dots \\ &= \int 2te^t\, dt = \int 2t\Big(e^t\Big)'\, dt \\ &= 2te^t - \int 2e^t\, dt = 2te^t - 2e^t = \underline{\underline{2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}}}\end{aligned}$$

4. Vi har att $\exp(\int \frac{dx}{x}) = x$ så vi definierar $v(x)$ genom $y(x) = xv(x)$. Då är $y'(x) = v(x) + xv'(x)$ så den givna differentialekvationen kan skrivas $v(x) + xv'(x) = v(x) + 1$, dvs. $v'(x) = \frac{1}{x}$. Alltså gäller $v(10) - v(1) = \int_1^{10} \frac{dx}{x} = \ln 10$. Eftersom $y(1) = 2$ är $v(1) = 2$ så vi får att $\underline{\underline{y(10) =}}\ 10v(10) = \underline{\underline{10\ln 10 + 20}}$.

5. Se figuren:



Vi har att $\frac{r}{h} = \tan\alpha = \frac{s}{x}$ som ger att $s = \frac{rx}{h}$. Volymen av den tunna skivan (streckade) är alltså $\pi\Big(\frac{rx}{h}\Big)^2 dx$. Konens totala volym är summan av alla skivors volymer, dvs.

$$\text{konens volym } = \pi\int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx = \pi\Big[\frac{r^2x^3}{3\,h^2}\Big]_0^h = \underline{\underline{\frac{\pi r^2 h}{3}}}$$

6. Karakteristiska ekvationen $r^2+r-2=0$ har rötterna $r=-2$ och $r=1$, så den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_h(x)=Ae^x+Be^{-2x}$. Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$ som insatt i ekvationen ger

$$(2b-6a)\cos 2x-(2a+6b)\sin 2x=20\sin 2x$$

Identifiering av koefficienter ger $a=-1$, $b=-3$, dvs. $y_p(x)=-\cos 2x-3\sin 2x$. Den allmänna lösningen till den givna ekvationen (utan randvillkor) är alltså

$$y(x)=Ae^x+Be^{-2x}-\cos 2x-3\sin 2x$$

Villkoret $\lim_{x\to\infty} e^{-x}y(x)=1$ ger $A=1$ och nu ger villkoret $y(0)=0$ att $B=0$. Lösningen är alltså $\underline{\underline{y(x)=e^x-\cos 2x-3\sin 2x}}$

7. $$\int \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}\right)'(1-\ln x)\,dx=\frac{\ln x-1}{x}-\int\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{\ln x}{x}$$

alltså $$\underline{\underline{\int_1^\infty \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx}}=\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^\infty=0-0=\underline{\underline{0.}}$$

Här har vi använt egenskapen att ”logaritmer växer långsammare än varje potens”.

8. Vi logaritmerar: $\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x$. Derivera denna identitet:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

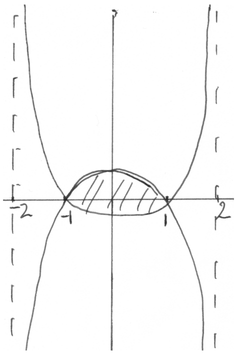
så vi ser att $f'(x)>0$ för $0<x<e$ och $f'(x)<0$ för $x>e$. Alltså är funktionen $f(x)$ växande för $0<x<e$ och avtagande för $x>e$. Det följer att $\underline{\underline{f(e)=e^{\frac{1}{e}} \text{ är funktionens största värde.}}}$ Eftersom $\lim\limits_{0<x\to 0}\ln f(x)=-\infty$ måste $\lim\limits_{0<x\to 0} f(x)=0$. För att $f(x)$ skall bli kontinuerlig definierar vi alltså $\underline{\underline{f(0)=0}}$.

”Logaritmer växer långsammare än varje potens” så $\lim\limits_{x\to\infty}\ln f(x)=0$ vilket innebär att $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, så $\underline{\underline{f(0)=0 \text{ är funktionens minsta värde.}}}$

9. Det är klart att kurvorna bara existerar för $-2 < x < 2$ eftersom y^2 och $(1-x^2)^2$ är positiva. Kurvorna beskrivs av de två funktionerna

$$y = \pm\frac{1-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

Vi ser att bägge kurvorna går genom x-axeln för $x = \pm 1$ och att nämnaren $\to 0$ då $x \to \pm 2$, dvs. $x = 2$ och $x = -2$ är lodräta asymptoter. Så här ser det ut, ungefär:



Området som innehåller origo är symmetriskt kring x-axeln, så arean är dubbla den som ligger ovanför x-axeln, dvs.

$$\begin{aligned}
\text{arean} &= 2\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \ldots \begin{bmatrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{bmatrix} \ldots \\
&= 2\int_{-\pi/6}^{\pi/6} 1 - 4\sin^2 t\,dt \\
&= 2\Big[2\sin t\cos t - t\Big]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \underline{\underline{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}}
\end{aligned}$$