KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 2004-11-08 kl 8.00–1300.
5B1135 Matematik I för I, 6p.
Hjälpmedel: inga.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

1. Visa att $8^n - 1$ är delbart med 7 för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3 \ldots$. (3p.)

2. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då ytan definierad av $0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$, $\quad 0 \le x < \infty$, roterar kring x-axeln. (3p.)

3. Bestäm $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(3x) - \sin(4x^2)}{\ln(1 + 2x^2)}$. (3p.)

4. Bestäm längden av kurvan $y = \cosh x,\ 0 \le x \le 10$. ($\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.) (3p.)

5. Bestäm derivatan $\dfrac{d}{dx} \log_x 3$. ($\log_x$ betyder logaritmen med basen x.) (3p.)

6. a) Visa att funktionen $f(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{3x}{4 + x}$ är växande för $x \ge 0$. (3p.)

   b) Avgör vilket av talen $\ln(1 + \sqrt{2})$ och $\dfrac{3\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}$ som är störst. (1p.)

7. Visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2}) \le \frac{\pi}{2}$. (4p.)

8. En funktion $y(x)$ definieras implicit av ekvationen $x^4 + y^4 = 2x^2 y$ och av att $y(1) = 1$. Visa att $y'(1) = 0$ och avgör om $x = 1$ är en lokal max-punkt, min-punkt eller terrasspunkt till funktionen $y(x)$. (4p.)

9. Om man skjuter en kanonkula från jordytan rakt uppåt, så kommer hastigheten $v(x)$ att uppfylla differentialekvationen $v\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{MG}{x^2}$, där x är avståndet *räknat från jordens medelpunkt*. Här är MG konstant (jordens massa multiplicerat med Newtons gravitationskonstant.) Låt R beteckna jordens radie. Bestäm den hastighet v_0 som är sådan att om $v(R) = v_0$ så blir $v(\infty) = 0$ (mer precist: $\displaystyle\lim_{x \to \infty} v(x) = 0$. v_0 är flykthastigheten: den lägsta utgångs-hastighet som gör att kulan aldrig ramlar ner på jorden igen.) (4p.)

10. Bestäm det positiva x-värde där funktionen $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$ har derivatan noll: $G'(x) = 0,\ x \ge 0$. (4p.)

Lycka till! — Harald