KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 29/11-2004, kl 8.00–13.00.
5B1135 Matematik I för ÖI.
Hjälpmedel: inga.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

---

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - x^3 \arctan \frac{1}{x}\right)$. (3p.)

2. Låt M vara ett givet tal, och definiera $y(x)$ för $-1 < x < 1$ genom sambandet

$$y(x) - x \sin y(x) = M$$

   a) Bestäm $y(0)$, $y'(0)$ och $y''(0)$ (som blir uttryck i M.) (3p.)
   b) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $y(x)$ t.o.m. x^2 termen, och ange resttermen på en lämplig form. (En ”lämplig form” är en form som stämmer för Maclaurin-polynomet men inget annat polynom.) (3p.)

3. Bestäm en primitiv funktion till $e^{\sqrt{x}}$. (3p.)

4. Funktionen $y(x)$ uppfyller villkoren $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + 1$ och $y(1) = 2$. Bestäm värdet $y(10)$. (3p.)

5. Härled uttrycket för volymen av en cirkulär kon. Konen har en cirkulär botten med radien r och spetsen h längdenheter ovanför centrum av bottenytan. (4p.)

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y''(x) + y'(x) - 2\,y(x) = 20 \sin(2x)$$

   som uppfyller $y(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\, y(x) = 1$. (4p.)

7. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 - \ln x}{x^2}\, dx$. (4p.)

8. Betrakta funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ för $x > 0$. Bestäm ett värde på $f(0)$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \geq 0$, och bestäm därefter funktionens största och minsta värde på intervallet $0 \leq x < \infty$. (4p.)

9. Relationen $(4 - x^2)y^2 = (1 - x^2)^2$ definierar två kurvor som tillsammans delar upp x, y-planet i fem olika områden varav ett innehåller origo. Beräkna arean av detta område. (4p.)