KTH "Dagens" 2/12

för Matematik II, I-linjen 2002
Harald Lang

1. Du skall visa Eulers identitet. En funktion $f(x, y, z)$ sägs vara *positivt homogen av grad* p om

$$f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z) \quad \text{för alla } t > 0. \tag{1}$$

För en sådan funktion gäller Eulers indentitet:

$$\nabla f(x, y, x) \bullet (x, y, z) = p\, f(x, y, z) \tag{2}$$

Visa detta, henom att derivera identiteten (1) m.a.p. t och sedan sätta $t = 1$. Naturligtvis gäller motsvarande resultat för funktioner av annat än tre variabler.

2. Visa att följande funktioner är positivt homogena, och bestäm graden:

a. $x + 2y + 3z$ **b.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ **c.** $\dfrac{x + y + z}{x^2 + 2y^2 + 6z^2}$

3. Antag att vi har ett extremvärdesproblem där vi skall maximera eller minimera $f(x, y, z)$ under bivillkoret $g(x, y, z) = c$, där f är positivt homogen av grad p och g är positivt homogen av grad q. Vi löser då Lagrange-problemet

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda\, \nabla g(x, y, z)$$

Visa att i en extrempunkt (x, y, z) då gäller att

$$f(x, y, z) = \frac{q}{p} \lambda c.$$

4. Använd resultaten i tidigare uppgifterna för att bestämma

minsta värdet av $x + 2y + 3z$
under bivillkoret $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$

Största värdet är 3. Hur inser man det?

5. Gör 816 i övningsboken.

Svar:

4a. 1. **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** -1.

4. Minsta värdet är $\frac{6}{11}$. Att största värdet är 3 kan man inse så här: Eftersom $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ är x, y och $z \leq 1$ och alltså $x \leq \sqrt{x}$, $y \leq \sqrt{y}$, $z \leq \sqrt{z}$. Alltså är $x + 2y + 3z \leq \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} \leq 3(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = 3$. Vi kan alltså inte få något större värde än 3 och detta antas för $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.