KTH "Dagens" 15/11

för Matematik II, I-linjen 2002

Harald Lang

1. (Ö 465) Visa att om funktionerna $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ (har kontinuerliga partiella derivator upp till andra ordningan och) uppfyller relationerna

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

så är $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$ och $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$.

2. (Ö 462c) Transformera ekvationen

$$\frac{\partial^2 zy}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{4y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

till en ekvation som bara innehåller variablerna u och v och derivator m.a.p. dessa variabler, när $\begin{cases} x = ue^{v} \\ y = ue^{-v} \end{cases}$.

3. (A 6.11) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan

a) $x^2 - y - 2z = 0$ i punkten $(-1, 5, -2)$.

b) $x^3 - 3xy + 2z = 0$ i punkten $(-1, 5, -7)$.

4. (A 6.12) Bestäm den eller de punkter på ytan

a) $x^2 - y - 2z = 0$,

b) $x^3 - 3xy + 2z = 0$,

i vilken tangentplanet är parallellt med planet $x + 2y + z = 0$.

5. Betrakta avbildningen $F(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ som definieras av $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$ där $\mathbf{A}$ är en $n \times n$-matris och $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Visa, genom att använda definitionen på derivata direkt, att $dF(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\,d\mathbf{x}$ där förstås $d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$.

Svar: Se respektive lärobok!