Dagens 18/11

1. Visa att ekvationen $x \ln(1 + y^2) + \sin(xy + 1) = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(0,0)$ precis en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(0) = 0$.

2. Visa att det i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 2$ och sådan att $z(1,1) = 1$. Bestäm för denna funktion:
   a. $z'_x(1,1)$ och $z'_y(1,1)$
   b. grad $z(1,1)$
   c. riktningsderivatan i punkten $(1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (2,-6)$.

3. Visa att funktionen $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{cases} u = 2x + \sin y \\ v = \sin x + y + 1 \end{cases}$ är lokalt inverterbar. Beräkna, i punkten $(u,v) = (0,1)$, de partiella derivatorna $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ samt inversens Jacobimatris.

4. Visa at ekvationssystemet $\begin{cases} xy^2 + yz^2 + zx^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten $(0,1,2)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ och $z = z(x)$ sådana att $y(0) = 1$ och $z(0) = 2$.

Svar:

2. a. $z'_x(1,1) = -5/2$, $z'_y(1,1) = -1$.
   b. grad $z(1,1) = (-5/2, -1)$.
   c. 1.

3. $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.