KTH **"Dagens" 25/11**

för Matematik II, I-linjen 2002
Harald Lang

1. Vi hann ju inte med det här förra veckan, så vi tar det igen:
Bestäm karakteristiska polynomet för den kvadratiska formen $x^2-6xy+10y^2-4yz$. Bestäm signaturen och avgör om formen är positivt definit, negativt definit eller indefinit.

2. Bestäm karakteristiska polynomet för följande kvadratiska former. Bestäm signaturen med Descartes teckenregel. Bestäm också nollställena till polynomen genom direkt uträkning, och verifiera att Descartes teckenregel ger rätt svar i dessa fall. Bestäm typen av den kvadratiska formen (positivt definit, etc.)

a) $4y^2 - 2xz + 6yz$

b) $2x^2 + 9y^2 + z^2 + 8xy - 2yz$

3. Visa att funktionen $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 8x - 15y + 20$ antar sitt minsta värde i punkten $(x,y) = (1,2)$.

4. Bestäm eventuella lokala extrempunkter till följande funktioner:

a. $2xy^2 + x^2 + 4y$

b. $2x + y + 3\sqrt{1 + x^2 + y^2}$

c. $x^3 - 3xy + y^3$

d. $3x^3 - 9x + 3y - y^3$

e. $x^2 + 2xy - y^3$

5. Är det sant att $2x^2 + 3y^2 + 4\sin x \sin y \geq 0$ om (x,y) ligger tillräckligt nära origo?

6. Verifiera att funktionen $f(x,y) = (1+y)^3x^2 + y^2$ endast har en kritisk punkt, och att f i denna antar ett lokalt minimivärde. Är detta också funktionens minsta värde?

Svar:

1. $-\lambda^3+11\lambda^2+3\lambda-4$. Två positiva koefficienter, en negativ, ingen noll. Indefinit.

2a. $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda - 4$. Indefinit **2b.** $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 12\lambda$. Pos. semidefinit.

4a. Inga extrempunkter (sadelpunkt i $(-1,1)$)

4b. Lokalt minimum i $(-1, -\frac{1}{2})$

4c. Lokalt minimum i $(1,1)$ (sadel i origo)

4d. Lokalt minimum i $(1,-1)$, lokalt maximum i $(-1,1)$
(sadel i $(1,1)$ och $(-1,-1)$.)

4e. Lokalt minimum i $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, lokalt maximum i $(-1,1)$. (sadel i origo).

5. Ja

6. Lokalt minimum i $(0,0)$, men detta är inte funktionens minsta värde. Tex. är $F(3,-2) < f(0,0)$. Observera skillnaden mot funktioner av en variabel; om en sådan bara har en kritisk punkt, och denna är en lokal minimipunkt, så är det också en global minimipunkt. (Bevis?)