KTH **"Dagens" 27/11**

för Matematik II, I-linjen 2002
Harald Lang

1. Bestäm ett Cartesiskt koordinatsystem – dvs. ange basvektorerna i koordinatsystemet, och skriv upp hur koordinaterna transformeras – i vilket den kvadratiska formen

$$x^2 + \frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 + yz$$

blir på huvudaxelform, och ange denna form.

2. Bestäm en ON-matris C sådan att C^TAC blir diagonal, och ange diagonalmatrisen. Här är

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 9 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Ekvationen $49x^2+6xy+41y^2 = 10$ beskriver en ellips. Bestäm rittningarna för huvudaxlarna: storaxeln resp. lillaxeln. Ange också huvudaxlarnas längder.

4. Här behövs en miniräknare eller dylikt. Plotta följande punktsvärm i ett Cartesiskt koordinatsystem:

$$(-6,-8),\ (-4,-5),\ (-2,-2),\ (-2,-3),$$
$$(0,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,2),\ (4,5),\ (6,8)$$

Du skall bestämma den räta linje som bäst anpassas till dessa punkter. Med "bäst anpassas" menas här att summan av kvadraterna på alla (vinkelräta) avstånd från punkterna till linjen skall vara så liten som möjligt. Nu är summan av alla x-koordinater noll, liksom summan av alla y-koordinater, vilket underlättar litet.

Så här går det till: blida 10×2 matrisen vars första kolonn består av x-koordinaterna och andra av y-koordinaterna. Bilda därefter 2×2-matrisen A^TA. Bestäm spektralvärdena för denna matris, och en egenvektor som hör till det *minsta* spektralvärdet. Denna vektor är en normalvektor till den sökta linjen, som går genom origo.

Skriv nu linjens ekvation på formen $y = cx$ med ett närmevärde på c och rita in linjen i diagrammet med punkterna. Ser det ut att stämma bra?

Svar:

1. Ett koordinatsystem ger av basvektorerna $(1,0,0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}})$. De gamla koordinaterna (x,y,z) uttrycks i de nya (u,v,w) via

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

2. Det finns flera möjligheter. En är $C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Formen blir $9v^2 + 9w^2$.

3. Storaxeln är parallell med $(1, -3)$, längden är $\frac{1}{2}$; lillaxeln är parallell med $(3, 1)$ och längden är $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

4. Ekvationen för linjen är exakt $153x - (\sqrt{25\,090} - 41)y = 0$ eller ungefär $y = 1.30326x$.