KTH "Dagens" 4/12

för Matematik II, I-linjen 2002
Harald Lang

1. Ange en minsta-kvadrat-lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 11 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

2. Punkterna $(x, y, z, u) = s(1, 1, 2, 0) + t(2, 1, 0, 1)$ bildar ett plan genom origo i $\mathbf{R}^4$ (s och t är parametrar som antar alla reella värden.) Vilken av punkterna i planet ligger närmast punkten $(4, -3, 2, -1)$, och vad är detta avstånd?

3. Låt p och q vara positiva reella tal sådana att $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Visa att för alla positiva x och y gäller att

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

Ledning: maximera xy under bivillkoret $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q = c$.

4. Man vill anpassa en funktion $y(x, u)$ av typen

$$y = a + bx + cx^2 + d \ln u$$

med minsta-kvadrat-metoden till data på x, u och y:

$$\begin{cases} x = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \\ u = u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \\ y = y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n \end{cases}$$

Hur ser den ekvation ut som bestämmer konstanterna a, b, c och d?

Svar:

1. $x = 4$, $y = 1$.

2. $(\frac{4}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$. Avståndet är $\frac{2\sqrt{57}}{3}$.

4. Koefficienterna bestäms ur sambandet $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ln u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ln u_n \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$