Övningar på $\mathbf{R}^n$ och koordinatbyten

1. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(1, 1, 4, -2)$ och $(-1, 0, 1, 5)$

2. Observera: man behöver inte veta någonting om ekliptiska eller ekvatoriella koordinater för att lösa den här uppgiften. Det är bara att läsa innantill.

Solens position idag är $(\cos(224°), \sin(224°), 0)$ i det ekliptiska koordinatsystemet. I det ekvatoriella koordinatsystemet är solens position $(\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta)$ Basvektorerna i det ekliptiska systemet uttryckt i det ekvatoriella är $(1, 0, 0)$, $(0, \cos 23.5°, \sin 23.5°)$, $(0, -\sin 23.5°, \cos 23.5°)$. Bestäm δ.

δ är solens deklination, dvs. talar om vinkeln mellan ekvatorsplanet och solen. Om du räknat rätt får du $\delta = -16.1°$. Det betyder att här i Stockholm står solen, när den står som högst (vilket inträffar idag, 6/11, ungefär 11:30), står $90° - 59.35° - 16.1° \approx 14.5°$ över horisonten ($59.35°$ är Stockholms breddgrad)! Uuuch – inte undra på att det är mörkt. Men värre blir det, vid vintersolståndet blir det bara drygt $7°$.

Om du får lust kan du ju också beräkna α. Det är solens rektascension, alltså det som motsvarar "longitud" på himmelssfären.

3. Vi vill bestämma spegelbilden av punkten $(2, 3, 4)$ i planet $x + y + z = 0$. Gör det på följande sätt: inför ett nytt Cartesiskt koordinatsystem $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ där $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ ligger i planet.

I det nya systemet får då punkten $(2, 3, 4)$ några koordinater (a, b, c), och spegelbilden i planet, som nu är det nya $x'y'$-planet, är givetvis $(a, b, -c)$. Nu går du tillbaks till det gamla koordinatsystemet och beräknar denna punkts koordinater i det systemet.

Du kan hitta ett lämpligt nytt koordinatsysten så här: Uppenbart måste $\mathbf{f}_3$ vara ortogonalt mot planet $x + y + z = 0$. Eftersom $(1, 1, 1)$ är en normalvektor väljer vi $\mathbf{f}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ (den måste ju få längden $= 1$.) Som $\mathbf{f}_2$ kan vi ta vilken som helst vektor i planet med längd ett, t.ex. $\mathbf{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$. Nu tar vi $\mathbf{f}_1$ som kryssprodukten. Kontrollera att den också ligger i planet! Kontrollera också att du får ett högersystem (dvs. positivt orienterat), även om det inte är nödvändigt för den här uppgiften. Skulle det bli ett vänstersystem är det bara att ändra tecken på någon av basvektorerna.

4. Bestäm en ekvation för planet $2x - \sqrt{3}y + z = 4$ i det koordinatsystem man får om man vrider det utsprungliga längs z-axeln $60°$ i positiv led.

---

svar:

1. $\arccos(\frac{-7}{3\sqrt{66}}) \approx 106.7°$.

2. Rektascensionen är $\approx 221.5°$.

3. $(-4, -3, -2)$. Det går ju att räkna ut på enklare sätt, men nu skulle du ju öva . . . .

4. $-\frac{1}{2}x + 2y + z = 4$.