5B1137 Reell analys I, ht 2006
Lösningsförslag till lappskrivning 1

1. *Låt* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vara en följd av reella tal. Ge en rigorös definition av vad som menas med att*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$
Lösning: För varje $\epsilon > 0$ finns ett $N = N(\epsilon)$ så att
$$n > N \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

2. *Låt* $0 < a < 1$. *Visa att*
$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$
med hjälp av definitionen ovan (det vill säga utan att använda någon känd konvergenssats).
Lösning: $0 < a < 1 \Longrightarrow a$ kan skrivas som
$$a = \frac{1}{1+h} \quad \text{för något } h > 0.$$
Då är
$$0 < a^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots} < \frac{1}{nh} < \epsilon \text{ om } n > \frac{1}{\epsilon h}.$$

3. *Talföljden* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definieras på följande sätt:*
$$a_1 = 2 \quad \text{och} \quad a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{a_n + 1} \quad \text{då} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots.$$
Beräkna $\lim_{n\to\infty} a_n$*!*
Ledning: *Titta på några tal i början av följden, gör en kvalificerad gissning, och använd sedan till exempel induktion för att visa att gissningen är korrekt.*

Lösning: Vi har

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{5}{3},\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = \frac{7}{5}, \ldots.$$

Om vi ANTAR att $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ finns, så ger

$$n \to \infty \quad \text{i} \quad a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{a_n + 1}$$

att

$$A = \frac{3A-1}{A+1} \iff A^2 - 2A + 1 = 0 \iff (A-1)^2 = 0 \iff A = 1.$$

Så vi GISSAR att a_n avtar mot 1. Vi visar först att $a_n > 1$ för alla n med induktion, d.v.s. vi visar påståendena $P_n : a_n > 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Observera till att börja med att

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{3(a_n + 1) - 4}{a_n + 1} = 3 - \frac{4}{a_n + 1}.$$

Sedan gör vi det vanliga induktionsbeviset:

(1) P_1 är sant, ty $a_1 = 2$.

(2) $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$:

$$a_n > 1 \iff a_n + 1 > 2 \iff \frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{2} \iff \frac{-1}{a_n+1} > -\frac{1}{2}$$
$$\iff \frac{-4}{a_n+1} > -\frac{4}{2} = -2.$$

Så

$$P_n \iff a_n > 1 \Longrightarrow a_{n+1} > 3 - 2 = 1 \iff P_{n+1}.$$

(3) $(1) \Longrightarrow P_1 \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} P_2 \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} P_3 \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} P_4 \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} \ldots.$

Att $\{a_n\}$ är avtagande betyder att $a_n - a_{n+1} > 0$ för alla n – vilket är sant:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{3a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{{a_n}^2 - 2a_n + 1}{a_n + 1} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n + 1} > 0,$$

eftersom $a_n > 1$.

$\{a_n\}$ avtagande och nedåt begränsad $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ finns – och måste enligt ovan vara lika med 1.