5B1137 Reell analys I, ht 2006
Lösningsförslag till lappskrivning 2

1. *En välkänd sats säger att*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är konvergent } \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Visa att omvändningen är falsk genom att betrakta exemplet $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *Det vill säga, visa att*

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0,$$

men att

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \text{ är divergent.}$$

Lösning:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/n} + 1}, \text{ där } \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \to \frac{1}{2} \text{ då } n \to \infty$$

$\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent, vilket man ser genom jämförelse med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$, som är divergent eftersom $1/2 < 1$.

2. *Bestäm konvergensområdet (inklusive eventuella ändpunkter) för potensserien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Lösning:

$$a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}} \implies \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{|x|^n} = |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \to |x|$$

då $n \to \infty$, så kvottesten säger att $\sum a_n$ är konvergent då $|x| < 1$ och divergent då $|x| > 1$. Återstår: $x = \pm 1$.

$$x = +1 \Longrightarrow \sum \frac{1}{n^{1/2}} = \text{ divergent;}$$
$$x = -1 \Longrightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}, \text{ som är konvergent enligt Cauchys sat om}$$
alternerande serier.

3. *Visa direkt från definitionen (således utan att använda den sats som säger att kontinuerliga funktioner på kompakta intervall automatiskt är likformigt kontinuerliga där) att funktionen $f(x) = x^2$ är likformigt kontinuerlig på $[-5, 5]$.*

   Det vill säga, visa att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett δ som bara beror på ϵ så att

   $$x_1, x_2 \in [-5, 5] \text{ och } |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \epsilon.$$

   Lösning: På $[-5, 5]$ är

   $$|x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \leq |x_1 - x_2| \cdot (5 + 5) = 10\,|x_1 - x_2| < \epsilon$$
   om $|x_1 - x_2| < \delta \stackrel{def}{=} \dfrac{\epsilon}{10}$.