5B1137 Reell analys I, ht 2006
Lösningsförslag till lappskrivning 3

1. (a) *Visa att*
$$e^x > 1 + x \quad \text{då} \quad x > 0$$
utan *att använda MacLaurinutvecklingen av* e^x.

Lösning: $f(x) = e^x - 1 - x \Longrightarrow f(0) = 0$ och $f'(x) = e^x - 1$, som är > 0 då $x > 0 \Longrightarrow f(x)$ är *växande* då $x > 0$. Eftersom $f(x)$ växer från $f(0) = 0$, så måste $f(x)$ vara > 0 då $x > 0$.

(b) *Låt* $a > 1$. *Visa att det finns ett positivt tal* δ *(som beror på* a*) så att*
$$e^x < 1 + ax \quad \text{då} \quad 0 < x < \delta.$$

Lösning: $f(x) = e^x - 1 - ax \Longrightarrow f(0) = 0$ och $f'(x) = e^x - a$, så att
$$f'(x) < 0 \iff e^x < a \iff x < \ln a.$$
Eftersom $f'(x) < 0$ då $x < \ln a$, så *avtar* $f(x)$ från $f(0) = 0$ fram till $\delta \overset{def.}{=} \ln a$, och är alltså < 0 *åtminstone* då $0 < x < \delta = \ln a$.

2. *Låt* $a > 0$. *Beräkna*
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a}.$$

Lösning: l'Hospitals regel visar att
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \frac{''\infty''}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{a \cdot x^{a-1}} = \frac{1}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a} = 0.$$

3. *Använd MacLaurinutvecklingen av ordning 3 för att beräkna ett närmevärde till* $\cos(0,1)$, *samt ange hur stor feltermen blir.*

Lösning: MacLaurinutvecklingen av ordning 3 säger att
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$$

för något c mellan 0 och x. Då $f(x) = \cos x$ fås

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\cos(c)}{4!}x^4,$$

där $|\cos(c)| \leq 1$ för *alla* c. Så

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{med ett fel som är högst} \quad \pm\frac{x^4}{24}.$$

För $x = 0,1$ fås alltså

$$\cos(0,1) = 1 - 0,5 \cdot 10^{-2} \pm \frac{10^{-4}}{24} = 0,995 \pm \frac{10^{-4}}{24}.$$