Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till tentan i 5B1137 Reell analys I för F1, 06-12-18, kl. 8.00 – 13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har klarat lappskrivning i ($i = 1, 2, 3$) har automatiskt klarat tal i.
- För godkänt betyg krävs att man klarat ungefär hälften av talen.

1. *Låt S vara en begränsad delmängd av $\mathbb{R}$. Visa att* $\sup S$ *finns.* Ledning: *Upprepad intervallhalvering!*

   Lösning: Se boken sid. 87–88.

2. *Antag att $f(x)$ är växande och uppåt begränsad då $x \geq 10$. Visa att*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

   finns.

   Lösning: Låt $M = \sup_{x\geq 10} f(x)$ =minsta övre begränsningen av f:s värdemängd. $\epsilon > 0 \Longrightarrow M - \epsilon$ är *inte* en övre begränsning $\Longrightarrow$ finns x_0 så att $f(x_0) > M - \epsilon$. f växande $\Longrightarrow f(x) > f(x_0)$ om $x > x_0$, det vill säga

$$x > x_0 \Longrightarrow M - \epsilon < f(x) < M, \text{ för alla } \epsilon > 0,$$

   vilket betyder att $\lim_{x\to\infty} f(x) = M$.

3. *Beräkna*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

   för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ledning: *Gör variabelbytet $x = \sin\theta$ och härled därefter en rekursionsformel för I_n med hjälp av partiell integration.*

Lösning: $x = \sin\theta \implies \sqrt{1-x^2} = \cos\theta$, $dx = \cos\theta\, d\theta$ och $x = 0 \iff \theta = 0$, $x = 1 \iff \theta = \pi/2$, så

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta.$$

Vi får

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = 1,$$

och då $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta \cdot (-\cos\theta)'\, d\theta \\
&= [-\sin^{n-1}\theta \cdot \cos\theta]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta\, d\theta \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\theta \cdot (1-\sin^2\theta)\, d\theta = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
&\iff n \cdot I_n = (n-1)I_{n-2}.
\end{aligned}$$

Så vi får rekursionsformeln

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{för} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\begin{aligned}
n = \text{ jämnt tal } &\implies I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \\
n = \text{ udda tal } &\implies I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}.
\end{aligned}$$

4. *Låt $0 < b < a$. Genom att rotera cirkelskivan*

$$(x-a)^2 + y^2 < b^2$$

runt y-axeln fås en så kallad torus. *Visa att volymen av denna ges av*

$$V = (\text{längden av medelpunktens väg}) \cdot \text{tvärsnittsarean} = 2\pi a \cdot \pi b^2.$$

Lösning: Rotationsvolymen V är lika med

$$V = 2\pi \int_{a-b}^{a+b} x \cdot 2\sqrt{b^2 - (x-a)^2}\, dx = 4\pi b \cdot \int_{a-b}^{a+b} \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \cdot x\, dx.$$

$$t = \frac{x-a}{b} \iff x = a + bt \Longrightarrow dx = b\, dt \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} V &= 4\pi b^2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \cdot (a+bt)\, dt \\ &= 4\pi ab^2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt + 4\pi b^3 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \cdot t\, dt. \end{aligned}$$

Andra integralen är $= 0$, eftersom integranden är udda och integrationsintervallet är symmetriskt omkring $t = 0$. I den första integralen är integranden jämn, och därför är

$$V = 8\pi ab^2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

$$\begin{aligned} t = \sin\theta &\Longrightarrow \sqrt{1-t^2} = \cos\theta \text{ och } dt = \cos\theta d\theta \Longrightarrow \\ V &= 8\pi ab^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 4\pi ab^2 \cdot \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= 4\pi ab^2 \cdot \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi ab^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi a \cdot \pi b^2. \end{aligned}$$

5. *Låt $a \in \mathbb{R}$. Skriv $(1+x)^a$ som ett MacLaurinpolynom av graden n plus en restterm, samt visa att resttermen $\to 0$ då $n \to \infty$ för varje $x \in (-1, 1)$.*

Lösning: Från

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^a \Longrightarrow f(0) = 1, \\
f'(x) &= a(1+x)^{a-1} \Longrightarrow f'(0) = a, \\
f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2} \Longrightarrow \frac{f''(0)}{2!} = \frac{a(a-1)}{2!}, \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= a(a-1)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n} \Longrightarrow \\
\frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{a(a-1)\ldots(a-n-1)}{n!}, \\
f^{(n+1)}(x) &= a(a-1)\ldots(a-n)(1+x)^{a-n-1} \Longrightarrow \\
R_n(x) &= \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{(n+1)!(1+c)^{n+1-a}}x^{n+1}
\end{aligned}
$$

för något c mellan 0 och x, ser vi att

$$
\begin{aligned}
(1+x)^a =& 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\
&+ \frac{a(a-1)\ldots(a-n)(1+c)^a}{(n+1)!(1+c)^{n+1}}x^{n+1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|c| \leq |x| < 1 \Longrightarrow 1 - |x| \leq 1 + c < 1 \leq 1 + |x| \Longrightarrow \\
&|1+c|^a \text{ begränsad, säg } \leq K, \Longrightarrow \\
&|R_n(x)| \leq K \cdot \frac{|a(a-1)\ldots(a-n)|}{(n+1)!(1-|x|)^{n+1}} \leq \frac{K}{(n+1)!}\left(\frac{|a|}{1-|x|}\right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Med

$$
b := \frac{|a|}{1-|x|} \quad \text{ser vi att} \quad |R_n(x)| \leq K \cdot \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}
$$

Välj ett heltal m så att $b \leq m$. För $n > m$ är då

$$
\begin{aligned}
\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} &= \left(\frac{b}{1} \cdot \frac{b}{2} \cdots \frac{b}{m}\right) \cdot \frac{b}{m+1} \cdots \frac{b}{n+1} \\
&< \frac{b^m}{m!} \cdot \frac{b}{n+1} \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

6. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{\frac{1}{\sin(x^{-2})}+x}\right).$$

Lösning: Första roten kan skrivas som

$$\begin{aligned}(x^3+x+1)^{1/3} &= x\cdot\left(1+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/3}\\ &= x\cdot\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

I den andra roten är

$$\sin\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3!\,x^6}+\cdots=\frac{1}{x^2}\left(1-\mathcal{O}(x^{-4})\right),$$

så

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x^{-2})} &= x^2\cdot\frac{1}{1-\mathcal{O}(x^{-4})} = \ \{\text{geometriska serien}\}\\ &= x^2\cdot(1+\mathcal{O}(x^{-4})=x^2+\mathcal{O}(x^{-2}),\end{aligned}$$

varför hela andra roten kan skrivas på följande sätt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sin(x^{-2})}+x\right)^{1/2} &= (x^2+x+\mathcal{O}(x^{-2}))^{1/2}\\ &= x\cdot\left(1+\left(\frac{1}{x}+\mathcal{O}(x^{-4})\right)\right)^{1/2}\\ &= x\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\mathcal{O}(x^{-2})\right)\\ &= x+\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Till slut fås

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{\frac{1}{\sin(x^{-2})}+x} &= x+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)-x-\frac{1}{2}-\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\to-\frac{1}{2}\quad\text{då}\quad x\to\infty.\end{aligned}$$

7. *Låt*

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}, \quad n = 1,2,3,\dots, \quad \text{på} \quad [0,1].$$

Visa att funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergerar punktvist mot 0 då* $n \to \infty$. *Undersök sedan om konvergensen kanske till och med är likformig.*

Lösning: Uppenbarligen är $f_n(0) = 0$ för alla n. Då $x > 0$ är fixt är

$$0 < f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{n^2x} \cdot \frac{1}{x + n^{-2} \cdot x^{-1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Så $f_n(x) \to 0$ punktvist på $[0,1]$. Konvergensen är likformig om

$$\max_{[0,1]} f_n(x) \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Rättframma räkningar visar att

$$f_n'(x) = \dots = \frac{-n^{5/2}}{(1+n^2x^2)} \cdot \left(x + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{n}\right);$$

studium av derivatans tecken avslöjar sedan att

$$(f_n)_{\max} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{1/2}}{1+1} = \frac{\sqrt{n}}{2},$$

som *inte* $\to 0$ då $n \to \infty$. Det vill säga, konvergensen är *inte* likformig.

8. *Betrakta funktionsserien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad \text{där } x \geq 0.$$

(a) *Visa att serien konvergerar punktvist då* $x \geq 0$ *och beräkna dess summa.* Ledning: *Med hjälp av partialbråksuppdelning kan man skriva serien så att den blir teleskoperande (det vill säga, de flesta termerna tar ut varandra).*

(b) *Visa att serien är likformigt konvergent på* $[a, \infty)$ *för varje* $a > 0$, *men inte likformigt konvergent på* $[0, \infty)$.

Lösning: Partialbråksuppdelning ger att

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} &= \frac{1}{(n-1)n}\cdot\frac{x}{\left(x+\frac{1}{n-1}\right)\left(x+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \{\text{ handpåläggning }\}\\
&= \frac{1}{(n-1)n}\cdot\left(\frac{n}{x+\frac{1}{n-1}}-\frac{n-1}{x+\frac{1}{n}}\right)\\
&= \frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1},
\end{aligned}
$$

varför

$$
\begin{aligned}
S_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\cdots &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)\\
&+\cdots+\left(\frac{1}{(N-2)x+1}-\frac{1}{(N-1)x+1}\right)\\
&+\left(\frac{1}{(N-1)x+1}-\frac{1}{Nx+1}\right)\\
&= 1-\frac{1}{Nx+1}.
\end{aligned}
$$

Således är

$$|S_N(x)-1| = \frac{1}{1+Nx}.$$

(a) $S_N(0)$ är lika med 0 för alla N. x fixt $> 0 \implies (1+Nx)^{-1}\to 0$ då $N\to\infty \implies S_N(x)\to 1$ punktvist på $(0,\infty)$. Det vill säga, serien konvergerar punktvist mot

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{då} \quad x = 0,\\ 1, & \text{då} \quad x > 0.\end{cases}$$

(b) *Om* serien hade konvergerat likformigt på $[0,\infty)$, så hade gränsvärdesfunktionen $S(x)$ varit *kontinuerlig* – vilket inte är fallet. Då $x \geq a > 0$ är

$$\frac{1}{1+Nx} < \frac{1}{1+Na} < \epsilon \text{ om } N > \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right).$$

Så

$$N > \frac{1}{a\epsilon} \Longrightarrow |S_N(x) - 1| < \epsilon \text{ för } alla\ x \geq a,$$

vilket betyder att $S_N(x)$ konvergerar likformigt mot 1 då $x \geq a$.