EXEMPEL. Låt $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, och $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \geq 0$. Då är

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

I allmänhet gäller alltså att $g \circ f \neq f \circ g$. □

I läroböcker i analys studerar man ytterligare egenskaper hos funktioner, som är relevanta för de funktioner som studeras där: monotonitet m.m. Vi hänvisar dit för dessa saker. Där torde också finnas fler exempel och övningar på de saker vi tagit upp här.

ÖVNINGAR

303. Formulera motsatsen (negationen) till att en funktion $f : A \to B$ är
a) injektiv, b) surjektiv, c) bijektiv.
304. Visa att $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är bijektiv, då $f(x) = x^3$.
305. Bilda $f \circ g$ och $g \circ f$, då $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
306. Visa att $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ är injektiv, och bestäm f^{-1}, då $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.
Ange även $D_{f^{-1}}$.
307. Undersök vilka av följande funktioner som är injektiva, surjektiva, bijektiva:
a) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
c) $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $h(t) = 2t$. d) $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\Phi(t) = 2t$.
e) $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(s) = s^3 - 3s^2 + 6s$.

3.3 Relationer

Vad skall man egentligen mena med en *relation* mellan två storheter? Man kan kanske säga att den på något sätt uttrycker, att de två storheterna står i något sorts "förhållande" till varandra – men därmed har man ju egentligen inte sagt något alls! För att komma åt saken börjar vi med några exempel.

EXEMPEL. (a) "$x = y$" uttrycker att "ett tal är lika stort som ett annat" eller kanske bättre formulerat att två symboler står för samma tal.

(b) "$x \leq y$" är en annan välkänd relation. Den är "uppfylld" för vissa talpar (x, y), "falsk" för andra talpar.

(c) "x är far till y" uttrycker en relation av en annan, men välbekant typ (ordet "relation" används ju i flera språk, t.ex. franska och engelska, för att beteckna just släktskapsförhållanden).

(d) Låt x och y vara naturliga tal och säg att "x står i relationen R till y", omm x och y har samma slutsiffra när de skrivs på vanligt sätt (i basen 10).

(e) I kapitel 2 studerade vi relationen "$x \mid y$" mellan två heltal x och y. □

För att få en definition av begreppet relation, som täcker alla dessa fall (och många fler), kan man låta sig inspireras av funktionsgrafer. Ett sätt att åskådliggöra *funktionen* $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbf{R}$, var ju att rita kurvan $y = x^2$ i ett xy-plan, som representerar $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (fig. 1). På ett liknande sätt kan man representera *relationen* $x \leq y$ genom att markera de punkter (x, y) i $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ som uppfyller relationen (fig. 2). Man kan säga att "$\leq$" har en *graf*, som är delmängden $\{(x, y) \mid x \leq y\}$ av $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

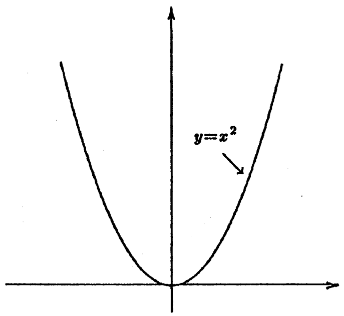

Fig.1

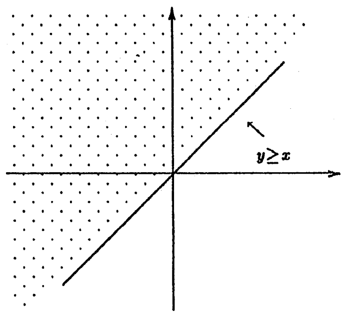

Fig.2

Detta inspirerar till följande svepande definition.

DEFINITION

En relation R från en mängd A till en mängd B är detsamma som en delmängd av $A \times B$:

$$R \subseteq A \times B.$$

Vi går igenom exemplen ovan:

(a) Här är $A = B = \mathbf{R}$, och relationen ges av linjen $y = x$.
(b) Se fig. 2.
(c) Sätt $A = B = \{\text{alla människor}\}$. Relationen består av alla par (x, y), där x är far till y.
(d) $A = B = \mathbf{N}$. Som exempel på par som tillhör R kan vi ta $(43, 93)$, $(33, 1003)$, $(78, 8)$, $(4\,711, 1)$. Däremot är t.ex. $(43, 94) \notin R$.

(e) $A = B = \mathbf{Z}$. Exempelvis gäller $(7,-21) \in \mid$, $(-5,75) \in \mid$, $(91,0) \in \mid$ men $(-21,7) \notin \mid$. □

Om R är en relation från A till B, består den alltså formellt av en mängd av par (x,y). I stället för att skriva $(x,y) \in R$ brukar man emellertid skriva $x\,R\,y$, "x står i relationen R till y", ett skrivsätt som anknyter till de vanliga relationerna $=$, $\leq$, m.fl.

Ett viktigt specialfall av relationsbegreppet får man om man startar med en *funktion* $f : A \to B$ och betraktar dess graf. Denna är ju en delmängd av $A \times B$ och alltså en relation. Det som kännetecknar denna typ av relation är att till varje $a \in A$ svarar *precis ett* element $b \in B$: "funktionen skall vara entydig". Ibland tas detta som definition av funktion:

En funktion $f : A \to B$ är en relation från A till B sådan att
(1) För varje $a \in A$ finns ett $b \in B$ sådant att $a\,f\,b$,
(2) Om $a\,f\,b_1$ och $a\,f\,b_2$, så gäller $b_1 = b_2$.

I stället för $a\,f\,b$ skriver man i detta fall normalt $b = f(a)$.

3.4 Ekvivalensrelationer

De vanligaste relationerna av matematiskt intresse (utom funktioner) är relationer från en mängd A till *samma* mängd. Man talar då om en *relation på mängden A*.

Vi skall här närmare studera en viktig kategori av relationer på en mängd A. Exemplen (a) och (d) har vissa gemensamma egenskaper:

(1) De är *reflexiva:* $x\,R\,x$ för alla x.

(2) De är *symmetriska:* $x\,R\,y \;\Rightarrow\; y\,R\,x$ för alla x och y.

(3) De är *transitiva:* $x\,R\,y \,\wedge\, y\,R\,z \;\Rightarrow\; x\,R\,z$ för alla x, y och z.

Många viktiga relationer har dessa tre egenskaper. Sådana relationer kallas *ekvivalensrelationer.*

EXEMPEL. (a) $A = \{$räta linjer i planet$\}$. Låt $x\,P\,y$ omm $x \in A$ och $y \in B$ är parallella (eller sammanfaller).

(b) $B = \{$alla människor$\}$. Låt $x\,F\,y$ omm $x \in B$ och $y \in B$ har samma födelseår.

(c) Relationen S på $\mathbf{R}^2$, som ges av att $(x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2)$ omm $x_1 = x_2$.

(d) $D = \{$alla trianglar i planet$\}$. Sätt $x\,L\,y$ omm x och y är likformiga.

(e) Låt n vara ett fixt positivt heltal, och definiera en relation K på $\mathbf{Z}$ genom att sätta $x\,K\,y$ omm $n \mid (x-y)$. □

För relationen i det sista exemplet har man ett vedertaget skrivsätt:

$$x \equiv y \pmod{n},$$

vilket utläses "x är kongruent med y modulo n". Så gäller t.ex.

$$\begin{aligned} 20 &\equiv 6 \pmod 7, &&\text{ty}\quad 20-6 = 14 = 2\cdot 7,\\ 411 &\equiv -6 \pmod 3, &&\text{ty}\quad 411-(-6) = 417 = 139\cdot 3. \end{aligned}$$

Vi genomför verifikationen av att (e) definierar en ekvivalensrelation.

Reflexivitet: $x \equiv x \pmod n$, ty $x - x = 0 = 0\cdot n$.

Symmetri: Om $x \equiv y \pmod n$, så gäller $x - y = a\cdot n$ för något $a \in \mathbf{Z}$. Men då är $y - x = -(x-y) = -a\cdot n = (-a)n$, dvs. $y - x$ är också en multipel av n och alltså gäller $y \equiv x \pmod n$.

Transitivitet: Antag att $x \equiv y \pmod n$ och $y \equiv z \pmod n$. Då finns heltal a, b sådana att $x - y = an$, $y - z = bn$. Då blir $x - z = x - y + y - z = (x-y)+(y-z) = an + bn = (a+b)n$, dvs. $x - z$ är också en heltalsmultipel av n, så att $x \equiv z \pmod n$. □

Låt E vara en ekvivalensrelation på en mängd A. För varje $x \in A$ kan vi bilda den delmängd A_x av A, som består av alla element som står i relationen E till x:

$$A_x = \{y \in A : x\,E\,y\}.$$

Vi kallar A_x för *ekvivalensklassen* till x. Eftersom $x\,E\,x$, gäller säkert att $x \in A_x$, så att $A_x \neq \emptyset$.

Antag att y tillhör A_x, dvs. $x\,E\,y$ och på grund av symmetrin $y\,E\,x$. Till y hör i sin tur en ekvivalensklass A_y. Om nu z är ett *godtyckligt* element i A_x, dvs. $x\,E\,z$, så kan vi kombinera detta med $y\,E\,x$ och finner att $y\,E\,z$ (transitiviteten), dvs. $z \in A_y$ gäller också! Eftersom z var ett godtyckligt element i A_x har vi visat att $A_x \subseteq A_y$. Å andra sidan kan vi låta x och y byta roller i resonemanget och dra slutsatsen att $A_y \subseteq A_x$. Tillsammans har vi då att $A_x = A_y$, dvs. vi har visat att *ekvivalensklassen inte beror på vilket element man väljer att beskriva den med.*

Om man tänker efter, inser man att detta innebär följande:

> SATS 1
>
> *Mängden A uppdelas genom ekvivalensrelationen E i ett antal parvis disjunkta delmängder (ekvivalensklasserna), som tillsammans täcker hela A.*

Vi går tillbaka till exemplen ovan och identifierar ekvivalensklasserna.

(a) En ekvivalensklass består här av alla linjer som är parallella med en viss fixerad (dubbel-)riktning. Man skulle kunna identifiera "ekvivalensklass" med "dubbelriktning".

(b) Ekvivalensklass = årskull.

(c) En ekvivalensklass består av alla punkter som har samma första koordinat, dvs. ekvivalensklass = lodrät linje i planet.

(d) Formulera själv!

(e) För att göra det hela mer konkret, studerar vi först fallet $n = 10$. Antag att x är ett *positivt* heltal, som har slutsiffran 7, då det skrivs i basen 10. Ekvivalensklassen till x kommer då att innehålla alla positiva heltal med samma slutsiffra, och dessutom alla negativa heltal som slutar på 3:

$$A_7 = \{\ldots, -13, -3, 7, 17, 27, \ldots\} = \{10m + 7 \mid m \in \mathbf{Z}\}.$$

På liknande sätt kommer vart och ett av talen 0, 1, ..., 9 att karakterisera en ekvivalensklass. Dessa brukar kallas *restklasser modulo* 10, eftersom de kan beskrivas med den *rest*, som uppstår då talen i klassen divideras med 10. □

För andra värden på n ger relationen $x \equiv y \pmod{n}$ upphov till motsvarande n stycken restklasser. Om t.ex. $n = 7$, får vi klasserna

$$\begin{aligned}
\overline{0} = A_0 &= \{\ldots, -7, 0, 7, 14, \ldots\} = \{7m \mid m \in \mathbf{Z}\},\\
\overline{1} = A_1 &= \{\ldots, -6, 1, 8, 15, \ldots\} = \{7m + 1 \mid m \in \mathbf{Z}\},\\
\overline{2} = A_2 &= \{\ldots, -5, 2, 9, 16, \ldots\} = \{7m + 2 \mid m \in \mathbf{Z}\}
\end{aligned}$$

osv., där alltså restklassen $\overline{a}$ består av de heltal som kan skrivas på formen $7m + a$, där $m \in \mathbf{Z}$.

Vi har nu f.ö. två ekvivalenta beskrivningar av ekvivalensrelationen $x \equiv y \pmod{n}$:

(1) differensen $x - y$ är delbar med n,

(2) talen x och y ger samma [minsta ickenegativa] rest vid division med n.

Man kan vända på situationen i detta avsnitt så här. Låt A vara en godtycklig mängd och $\{A_k\}$ en *partition* av A, dvs. vi har delmängder A_k som är parvis disjunkta, dvs. $A_j \cap A_k = \emptyset$ om $j \neq k$, och som täcker hela A, dvs. varje $x \in A$ tillhör någon av mängderna A_k (som kan vara ändligt eller oändligt många). Definiera sedan en relation R på A genom att sätta $x\,R\,y$ omm x och y tillhör samma A_k. Då är R en ekvivalensrelation. Visa detta som (en skäligen enkel) övning!

ÖVNINGAR

308. Undersök om följande relationer är reflexiva, symmetriska och/eller transitiva. Vilka är således ekvivalensrelationer?
a) $A = \mathbf{R}$, $x\,T\,y$ omm $x < y + 1$.
b) Relationen $x \mid y$ på $\mathbf{Z}$.
c) $A = \{$alla människor$\}$. Definiera relationen S på A genom att sätta $x\,S\,y$ omm x och y är helsyskon eller samma person.
d) Ändra "helsyskon" i uppgift c) till "hel- eller halvsyskon".
e) Relationen Q på $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ som ges av $x\,Q\,y \Leftrightarrow x/y$ är rationellt.
f) $A = \{$alla räta linjer i planet$\}$; $a\,S\,b$ omm $a = b$ eller a och b ej är parallella.
g) A som i f); $a\,W\,b$ omm $a = b$ *eller* a och b är parallella *eller* a och b skär varandra under vinkeln $\frac{\pi}{3}$.

309. Låt $V = \{$alla riktade sträckor i rummet$\}$. Ett element i V kan alltså beskrivas med ett punktpar $x = (P, Q)$, varvid man tänker sig att sträckan utgår från P och slutar i Q. Definiera en relation E på V genom att säga att

$$x\,E\,y \quad \Leftrightarrow \quad \text{x och y är parallella eller sammanfallande och har samma längd och riktning.}$$

Visa att E är en ekvivalensrelation på V. Vad är en typisk ekvivalensklass? (Ekvivalensklasserna brukar kallas vektorer.)

310. Bestäm det minsta naturliga tal x som satisfierar
a) $x \equiv 45 \pmod{4}$ b) $x \equiv -17 \pmod{3}$
c) $x \equiv 4711 \pmod{7}$ d) $x \equiv 140 \pmod{9}$

3.5 Räkning med kongruenser

För kongruenser modulo ett heltal finns räkneregler, som kan användas bl.a. vid undersökning av delbarhetsförhållanden. Ett par regler sammanfattas i följande sats.

SATS 2

Låt n vara ett positivt heltal. Då gäller följande räkneregler:

(a) *Om* $x \equiv y \pmod{n}$ *och* $c \in \mathbf{Z}$, *så är* $cx \equiv cy \pmod{n}$.

Om $x_1 \equiv y_1 \pmod{n}$ *och* $x_2 \equiv y_2 \pmod{n}$, *så gäller*

(b) $x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \pmod{n}$ *och* (c) $x_1 x_2 \equiv y_1 y_2 \pmod{n}$.