561139, 070609

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Minsta kvadrat lösning ges av

$A^t A x = A^t b$, dvs lös

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 98/30 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49/15 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

4.
$$v_1 = 1+t \xrightarrow{L} 1 = \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)$$
$$v_2 = 1-t \longrightarrow -1 = -\tfrac{1}{2}(v_1+v_2)$$
$$v_3 = 1+t+t^2 \longrightarrow 1+2t+2t^2 = 2v_3 - \tfrac{1}{2}(v_1+v_2)$$

Låt $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

$$\therefore [L]_B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Gram-Schmidt $\Rightarrow$ $1, t, t^2 - 1/3$ är ortogonal bas för $\mathbb{R}_2[t]$.

$$P_W(f) = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 + \frac{\langle f, t\rangle}{\langle t, t\rangle} \cdot t + \frac{\langle f, t^2 - 1/3\rangle}{\langle t^2 - 1/3, t^2 - 1/3\rangle}(t^2 - 1/3)$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = 2 \qquad \langle f, 1\rangle = \int_0^1 2t \cdot 1\, dt = 1$$
$$\langle t, t\rangle = \int_{-1}^{1} t \cdot t\, dt = 2/3 \qquad \langle f, t\rangle = \int_0^1 2t \cdot t\, dt = 2/3$$
$$\langle t^2 - 1/3, t^2 - 1/3\rangle = \ldots = 8/45 \qquad \langle f, t^2 - 1/3\rangle = \ldots = 1/6$$

$$\therefore P_W(t) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{2/3}{2/3} \cdot t + \frac{1/6}{8/45} \cdot (t^2 - 1/3) =$$

$$\frac{15}{16} t^2 + t + 3/16$$

6. A sannolikhetsmatris $\Rightarrow \lambda_1 = 1$ är ett egenvärde. Låt λ_2, λ_3 vara de övriga rötterna till $p_A(\lambda)$.

$$\left.\begin{aligned} tr(A) = 1.6 &\Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0.6 \\ det(A) = 0.08 &\Rightarrow \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0.08 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0.2, \quad \lambda_3 = 0.4.$$

$\therefore$ Om $x(0) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i$ där v_1, v_2, v_3 är egenvektorer (med egenvärden $1, 0.2, 0.4$) så är

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \alpha_1 v_1.$$

Då $x(n)$ & $x(0)$ har samma kolonnsumma och $v_1 \geq 0$ måste $\alpha_1 = 0$.

$$\therefore \lim_{n \to \infty} x(n) = 0.$$

7. S symmetrisk $\Rightarrow \exists$ ON-bas $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ av egenvektorer för S, dvs $Sv_i = \lambda_i v_i$.
Om vi skriver $v \in V$ som $v = \sum \alpha_i v_i$ får vi:

$$q(v) = \langle \sum_i \alpha_i v_i, S(\sum_j \alpha_j v_j) \rangle = \langle \sum_i \alpha_i v_i, \sum \alpha_j \lambda_j v_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_i \alpha_i^2 \cdot \lambda_i \geq \lambda_{min} \sum_i \alpha_i^2$$

$$= \lambda_{min} \|v\|^2 \text{ eftersom } \|\sum \alpha_i v_i\|^2 = \sum \alpha_i^2.$$

8 Använd induktion på $n = \dim(V)$.
Fallet $n = 1$ trivialt.
Antag att satsen visad för $\underbrace{\dim(\tilde{V}) = n-1}_{\text{alla } \tilde{V} \text{ med}}$.

A har minst ett egenvärde λ_1 med tillhörande egenvektor v_1 (ty $P_A(\lambda)$ har minst en rot.). Vi kan anta att $|v_1| = 1$.
Låt $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vara ON bas för V.
Då är ${}_{B}[A]_B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & w \\ \hline 0 & M \end{array}\right]$ där w är radvektor och M en $(n-1)\times(n-1)$ matris.
$AA^* = A^*A \Rightarrow$ (eftersom B ON-bas)

$$[AA^*]_B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & w \\ \hline 0 & M \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \hline \bar{w}^t & \bar{M}^t \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} |\lambda_1|^2 & ? \\ \hline ? & ? \end{array}\right]$$

och

$$[A^*A]_B = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \hline \bar{w}^t & \bar{M}^t \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & w \\ \hline 0 & M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} |\lambda_1|^2 + |w|^2 & ? \\ \hline ? & ? \end{array}\right].$$

$\therefore A^*A = AA^* \Rightarrow |\lambda_1|^2 = |\lambda_1|^2 + |w|^2 \Rightarrow w = 0$, dvs

$[A]_B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right]$. $\therefore$ Om vi låter

$\tilde{V} = \mathrm{Span}(v_2, v_3, \ldots, v_n)$ ser vi att $A|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \tilde{V}$

(dvs begränsningen av A till $\tilde{V}$) också uppfyller egenskapen $A|_{\tilde{V}}^* A|_{\tilde{V}} = A|_{\tilde{V}} A|_{\tilde{V}}^*$; enligt induktionsantagande kan vi hitta en bas av egenvektorer $w_2, w_3, \ldots, w_n$ för $\tilde{V}$
$\Rightarrow v_1, w_2, \ldots, w_n$ är bas av egenvektorer för V.