B-dels uppgifter

1. Finns det en funktion sådan att $f(7) = 6$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ och $f''(x) > 0$ för $1 \leq x \leq 7$?

2. Finns det en funktion sådan att $\int_0^n f(x)\,dx = n$, för alla naturliga tal, n, och $f'(x) > 0$?

3. Ett klot med radie R, centrerat i origo i rummet, skärs itu av planet $x = a$, där $0 \leq a \leq R$. Bestäm volymen hos de två delarna.

4. Bestäm de reella konstanterna a och b så att polynomet

$$p(x) = x^4 + ax^3 + 24x^2 - 52x + b$$

blir jämnt delbart med $x^2 - 2x + 10$ och ekvationen $p(x) = 0$ saknar reella rötter.

5. a) Visa att en strängt växande funktion är inverterbar.

   b) Visa att inversen till en strängt växande funktion är strängt växande.

6. Planen $3x + 3y - 2z = 4$ och $x - 4y + z = 3$ skär varandra i en linje. Bestäm kortaste avståndet från linjen till planet $9x - 6y - z = -3$.

7. Följande sats är falsk. Finn alla felaktiga steg i beviset och ge motexempel till vart och ett av dem.

   Sats: Låt f vara en tre gånger deriverbar funktion sådan att $f''(x) \neq 0$ i ett öppet intervall, I. Då är f konstant på I.

   Bevis: Eftersom f'' är kontinuerlig och $f''(x) \neq 0$ så kan vi anta att $f''(x) < 0$. Men om $f''(x_0) < 0$ så betyder det att funktionen har ett lokalt maximum i punkten x_0, vilket ger att $f'(x_0) = 0$. Eftersom $f''(x) < 0$ för alla x i intervallet I har vi visat att $f'(x) = 0$ för alla punkter i intervallet. Men det ger att f är konstant i I.

8. Följande sats är falsk. Finn alla felaktiga steg i beviset och ge motexempel till vart och ett av dem.

   Sats: Låt f vara en två gånger deriverbar funktion sådan att $f''(x) = 0$ för alla x i ett slutet och begränsat intervall, I. Då är f konstant på I.

   Bevis: Att $f''(x) = 0$ för alla x i I ger att $f'(x)$ är konstant på intervallet. Men på ett slutet och begränsat intervall så antar en kontinuerlig funktion max och min, och i dessa punkter gäller $f'(x_0) = 0$. Så om f' ska vara konstant måste alltså $f'(x) = 0$ för alla x i I, vilket ger att f är konstant på intervallet.

Lösningar

1. Då $f''(x) > 0$ är f' strängt växande, vilket ger $f'(x) > 1$ om $1 < x < 7$, eftersom $f'(1) = 1$. Men då $f(7) = 6$ och $f(1) = 0$ finns enligt differentialkalkylens medelvärdessats en punkt a sådan att $1 < a < 7$ och $6 = f(7) - f(1) = f'(a)(7-1) = 6 \cdot f'(a)$, dvs $f'(a) = 1$, vilket motsäger att $f'(x) > 1$ för alla $1 < x < 7$. Alltså finns ingen sådan funktion.

2. Enligt integralkalkylens medelvärdessats gäller att det finns en punkt a sådan att $0 < a < 1$ och
$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(a),$$
och en punkt b sådan att $1 < b < 2$ och
$$\int_1^2 f(x)\,dx = f(b).$$
(Observera att vi har $1 - 0 = 1$ och $2 - 1 = 1$) Enligt förutsättningarna gäller
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx = 1,$$
så vi får att $f(a) = f(b)$. Enligt Rolles sats måste det därför finnas en punkt c i intervallet (a, b) sådan att $f'(c) = 0$, men det motsäger villkoret $f'(x) > 0$. Därmed får vi att det inte kan finnas en funktion som uppfyller förutsättningarna.

3. Klotets volym kan fås som en rotationsvolym genom att rotera funktionen $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, definierad på intervallet $-R \leq x \leq R$, kring x-axeln. Volymen ges då av integralen
$$V = \pi \int_{-R}^{R} (f(x))^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 dx.$$
Att dela klotet med planet $x = a$ svarar mot att dela upp integralen i delarna V_1 och V_2 där
$$V_1 = \pi \int_{-R}^{a} R^2 - x^2\,dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{a} =$$
$$= \pi(R^2 a + R^3 - \frac{a^3}{3} - \frac{R^3}{3}) = \pi(R^2 a + \frac{2R^3}{3} - \frac{a^3}{3})$$
$$V_2 = \pi \int_{a}^{R} R^2 - x^2\,dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{a}^{R} =$$
$$= \pi(R^3 - \frac{R^3}{3} - a^3 + \frac{a^3}{3}) = \pi(\frac{2R^3}{3} - \frac{a^3}{3}).$$
SVAR: Volymerna hos delarna blir $V_1 = \pi(R^2 a + \frac{2R^3}{3} - \frac{a^3}{3})$ och $V_2 = \pi(\frac{2R^3}{3} - \frac{a^3}{3})$.

4. Lösningarna till andragradsekvationen $x^2 - 2x + 10 = 0$ är $x_1 = 1 + 3i$ och $x_2 = 1 - 3i$. Då ekvationen $p(x) = 0$ förutsätts sakna reella lösningar, och vi antar att $p(x)$ kan delas med det reella polynomet $x^2 - 2x + 10$, så måste de två övriga lösningarna vara konjugerade. Låt c vara någon av dessa. Vi har då att

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2 \cdot Re(c)x + |c|^2) \\ &= x^4 - (2 + 2 \cdot Re(c))x^3 + (|c|^2 + 4 \cdot Re(c) + 10)x^2 + \\ &\quad +(-2|c|^2 - 20 \cdot Re(c))x + 10|c|^2. \end{aligned}$$

Jämför vi det med det givna uttrycket för $p(x)$ ser vi att $a = -(2 + 2 \cdot Re(c))$, $24 = |c|^2 + 4 \cdot Re(c) + 10$, $52 = 2|c|^2 + 20 \cdot Re(c)$ och $b = 10 \cdot |c|^2$. De två mellersta identiteterna ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 24 = |c|^2 + 4 \cdot Re(c) + 10 \\ 52 = 2|c|^2 + 20 \cdot Re(c), \end{cases}$$

med lösningarna $Re(c) = 2$ och $|c|^2 = 6$. Vi får därmed $a = -(2 + 2 \cdot Re(c)) = -6$ och $b = 10 \cdot |c|^2 = 60$.
SVAR: $a = -6$ och $b = 60$.

5. En funktion, f, är inverterbar om och endast om det för varje punkt y i värdemängden finns precis ett x så att $f(x) = y$, dvs om $f(y_1) = f(y_2)$ så gäller $y_1 = y_2$. Om f ej är inverterbar måste det alltså finnas punkter x_1, x_2 sådana att $f(x_1) = f(x_2)$ men $x_1 > x_2$. Eftersom en strängt växande funktion uppfyller $f(x_1) > f(x_2)$ om $x_1 > x_2$ kan detta aldrig inträffa för en strängt växande funktion. Därmed är alla strängt växande funktioner inverterbara. För att visa att inversen till en strängt växande funktion är strängt växande så använder vi oss av att $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$. Låt x_1 och x_2 vara punkter sådana att $x_1 > x_2$. Vi har då att om $y_1 = f^{-1}(x_1)$ och $y_2 = f^{-1}(x_2)$ så gäller $x_1 = f(y_1)$ och $x_2 = f(y_2)$. Om $y_1 < y_2$ så skulle vi, enligt antagandet att f är strängt växande, få att $x_1 = f(y_1) < f(y_2) = x_2$, vilket ger en motsägelse. Alltså måste vi ha att $y_1 > y_2$, vilket visar att f^{-1} är växande.

6. Skärningslinjen fås genom att lösa ekvationssystemet

$$I : \begin{cases} x - 4y + z = 3 \\ 3x + 3y - 2z = 4 \end{cases} .$$

Systemet kan lösas med Gauss-Jordans metod

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) &\Leftrightarrow [R2 \to -3R1 + R2] \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 15 & -5 & -5 \end{array}\right) \\ &\Leftrightarrow [R2 \to \tfrac{1}{15}R2] \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \\ &\Leftrightarrow [R1 \to R1 + 4R2] \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Systemet har alltså lösningarna

$$I : \begin{cases} x = \frac{5}{3} + t\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} + t\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Skärningslinjen blir därmed

$$l : \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + t\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

En punkt på planet är $(0, 0, 3)$. Avståndet kan fås genom att ta längden av projektionen av vektorn $\vec{u} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) - (0, 0, 3)$, som går från planet till linjen, på den normerade normalen till planet. Avståndet blir så

$$|\vec{u} \cdot \vec{n}| = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -3\right) \cdot \frac{(9, -6, -1)}{\sqrt{9^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{(15 + 2 + 3)}{\sqrt{118}} = \sqrt{\frac{10}{59}},$$

där $\vec{n}$ är den normerade normalen. SVAR: $\sqrt{\frac{10}{59}}$.

7. Att $f''(x_0) < 0$ ger inte direkt att f har ett lokalt maximum i punkten, exempelvis är $D^2(-x^2) = -2$ överallt men $-x^2$ har lokalt maximum enbart då $x = 0$.

8. En kontinuerlig funktion antar visserligen största och minsta värde på ett slutet, begränsat intervall, men dessa värden kan antas i ändpunkterna och medför därför inte att derivatan måste vara noll i de punkterna. Tex uppfyller funktionen $f(x) = x$ förutsättningarna i satsen på intervallet $[0, 1]$ men den är inte konstant där.