

Ekvationsystem

$$\text{Ex: } \begin{cases} x + y = 1 & \textcircled{1} \\ xy = -6 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Lös ut y från ekvation
① och sätt in i ekvation ②:

$$\begin{array}{l} (3, -2) \\ (-2, 3) \end{array} \quad \begin{array}{l} y = 1 - x \\ x(1 - x) = -6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{Ex: } \begin{cases} \sin x = \sin y & \textcircled{1} \\ y^2 = 4 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Ekv ② ger $y = 2$ eller $y = -2$.
Insatt i ekvation ① ger det

$$\sin x = \sin 2$$

$$\text{eller } \sin x = \sin(-2)$$

$$\text{Vi får så } x = 2 + 2\pi n, x = -2 + 2\pi n$$

$$\text{eller } x = \pi - 2 + 2\pi n \text{ eller } x = \pi + 2 + 2\pi n$$

Lösningarna blir så

$$y=2, x=2+2\pi n \text{ eller} \\ x=\pi-2+2\pi n$$

$$y=-2, x=-2+2\pi n \\ \text{eller } x=\pi+2+2\pi n$$

Linjära ekvationssystem

$$\text{Ex: } \begin{cases} 3x + 2y = 2 & \textcircled{1} \\ 2x + y = 3 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Lösning: Lös ut y ur ekvation $\textcircled{2}$
och sätt in i ekvation $\textcircled{1}$

$$y = 3 - 2x \quad \textcircled{3}$$

ger insatt i ekvation $\textcircled{1}$

$$3x + 2(3 - 2x) = 2$$

$$\Leftrightarrow -x + 6 = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

Föreläsning 1, sid 5

Sätt in $x=4$; ③

$$y = 3 - 2 \cdot 4 = -5$$

SVAR: $x=4, y=-5$

Föreläsning 1, sid 6

$$\text{Ex: } \begin{cases} 3x + 2y = 2 & \textcircled{1} \\ 2x + y = 3 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Lösning: Multiplicera ekvation $\textcircled{2}$
med -2 och addera ekvationerna

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -4x - 2y = -6 \end{cases}$$

Summan blir

$$-x = 2 - 6 = -4$$

$$x = 4 \quad \text{osv.}$$

Föreläsning 1, sid 7

$$\textcircled{-2} \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \textcircled{-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -4x - 2y = -6 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -6 \end{array} \right) \textcircled{1}$$

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow \\ R_2 + R_1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \textcircled{-1} \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -x + 0y = -4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{array} \right) \textcircled{-1}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2 \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \textcircled{3}$$

Föreläsning 1, sid 8

$$\frac{1}{2} \begin{cases} x + 2y = 2 - 3 \cdot 4 = -10 \\ x = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -10 \\ 1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Ex: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Op1: multiplicera en rad
med en konstant $\neq 0$

Op2: till en rad addera
en multipel av en annan
rad.

Op3: byta plats på två rader.

De här tre operationerna ger
ekvivalenta system.

Gauss-Jordans metod

Gauss-Jordans metod är en procedur som med hjälp av operationerna 1-3 tar ett system till ett enklare system där lösningarna direkt kan avläsas.

Föreläsning 1, sid 11

$$\text{Ex: } 0 = 0 \quad 0x + 0y + 0z = 0$$

x, y, z godtyckliga $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$

$$\text{Ex: } 0x + 0y + 0z = 3$$
$$(0 \ 0 \ 0 \mid 3)$$

saknar lösningar

$$\text{Ex: } \begin{cases} 0x + 3y + 2z = 2 \\ 0x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}$$

Föreläsning 1, sid 12

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right) \textcircled{-3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right) \textcircled{-\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \textcircled{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -5 \end{array} \right) = \frac{2}{3} + (-5) \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$y = 4$$

$$z = -5$$

$$x = t$$

Ex: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 4y + 9z = 3 \end{cases}$$

Lösning: På matrisform blir det

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-1} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \textcircled{-3} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Föreläsning 1, sid 15

$$\text{Ex: } \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \end{array}$$

Föreläsning 1, sid 16

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{4}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \textcircled{-\frac{3}{2}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{4}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow R_1 + \frac{3}{2}R_2 \\ \uparrow \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6}{7} - t \\ y = -\frac{4}{7} + t \\ z = t \end{cases}$$

där t är ett godtyckligt
reellt tal.

Ex:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{-1} \end{array}$$

saknar lösningar

\Leftrightarrow
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-1} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{-1} \end{array}$$

\Leftrightarrow
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$