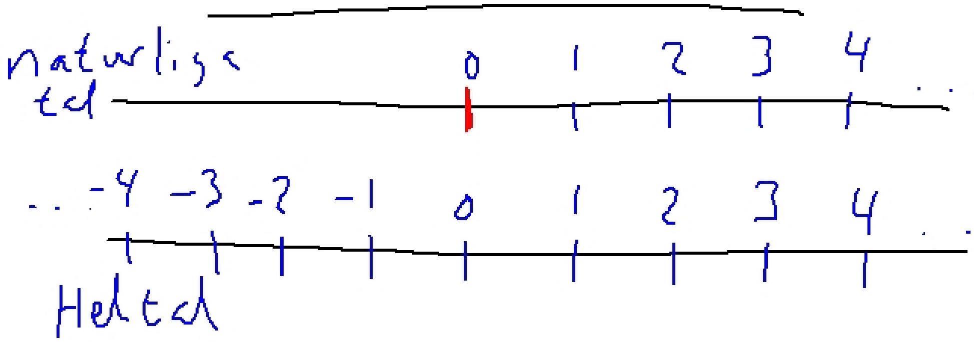
Induktionsbevis



$n!$

$$1! = 1$$

$$n! = n \cdot ((n-1)!)$$

Ex: Visa att $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
$n \geq 1$.

① $n=1$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ sant induktions bas

Induktions steg ② $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n =$

(antas sant för $n-1$)

$= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = \frac{(n-1)n}{2} + n =$

$= n\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = n\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsprincipen:

Antag att vi har en uppsättning påståenden $P(0), P(1), \ldots$

Om Induktionsbas: $P(0)$ sant

och Induktionssteg: Om $P(p)$ sant så är även $P(p+1)$ sant.

Då gäller att $P(n)$ sant för alla naturliga tal n.

Ex: Visa att $2^n > 2n+5$ för alla heltal $n \geq 4$.

Lösn: Induktionsbas: $2^4 = 16 > 8+5$ okej

Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för $n=p$ då gäller det även för $n=p+1$.

$$2^{p+1} = 2 \cdot 2^p > 2 \cdot (2p+5) =$$

$$= 2p+5+\cancel{2}p+2+\cancel{3} > 2(p+1)+5$$

Enligt induktionsprincipen gäller därför att $2^n > 2n+5$ för alla naturliga tal $n \geq 4$.

Ex: Visa att $9^n + 15$ är delbart med 8 för alla naturliga tal n.

Lösn: Induktionsbas ($n=0$):

$9^0 + 15 = 1 + 15 = 16$ som är delbart med 8.

Induktionssteg: Antag $8 \mid 9^p + 15$

och visa att $8 \mid 9^{p+1} + 15$.

$$9^{p+1} + 15 = 9 \cdot 9^p + 15 =$$

$$= (1+8)\,9^p + 15 = 9^p + 8 \cdot 9^p + 15$$

$$= (9^p + 15) + 8 \cdot 9^p$$

så enligt antagandet $8 \mid 9^p + 15$ får vi

$8 \mid 9^{p+1} + 15$.

Enligt induktionsprincipen kan vi nu dra slutsatsen att $8 \mid 9^n + 15$ för alla naturliga tal n.

Ex: Fibonaccis talföljd definieras genom rekursionsformeln

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad n \geq 0$$

Visa att talföljden är väldefinierad.

Induktionsbaser: a_p och a_{p+1}

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$ är definierade

Induktionssteg: Antag att är definierade

och visa att a_{p+2} då också är definierad.

$a_{p+2} = a_{p+1} + a_p$ definierad

Enligt induktionsprincipen är talföljden väldefinierad för alla $n \geq 1$.

Aritmetisk serie:

(samma differens)

Ex: $1+2+3+\ldots+100$

$2+5+8+11+14+17$

$31+25+19+13+7$

$$A = 1 + 2 + \dots + 100$$
$$+\ 100 + 99 + \dots + 1$$
$$101 + 101 + \dots + 101$$

$a = 1$
$d = 1$

100 st par som vardera ger 101 så $2A = 100 \cdot 101$

dvs $A = \dfrac{100 \cdot 101}{2}$

$$2A = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 +$$

$$+ \underset{19}{\underline{17}} + \underset{19}{\underline{14}} + \underset{19}{\underline{11}} + \underset{19}{\underline{8}} + \underset{19}{\underline{5}} + \underset{19}{\underline{2}}$$

$$A = \frac{6 \cdot 19}{2} \qquad \boxed{\begin{aligned} a &= 2 \\ d &= 3 \end{aligned}}$$

$$2A = 31 + 25 + 19 + 13 + 7 +$$

$$+ \underset{38}{\underline{7}} + \underset{38}{\underline{13}} + \underset{38}{\underline{19}} + \underset{38}{\underline{25}} + \underset{38}{\underline{31}} \qquad \boxed{\begin{aligned} a &= 31 \\ d &= -6 \end{aligned}}$$

$$A = \frac{5 \cdot 38}{2}$$

$$A = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-1)d)$$

$$\begin{array}{cccc} a + (a+d) + & \dots & + (a+(n-1)d) + \\ + \underbrace{(a+(n-1)d)}_{2a+(n-1)d} + \underbrace{(a+(n-2)d)}_{2a+(n-1)d} + & \dots & + \underbrace{a}_{2a+(n-1)d} \end{array}$$

$$2A = (2a+(n-1)d)\cdot n$$

så $$A = \frac{(2a+(n-1)d)n}{2}$$

Ex: $a = 31$, $d = -6$, $n = 5$ $$\frac{(62+4\cdot(-6))5}{2} = \frac{38\cdot 5}{2}$$

Geometrisk serie:

(samma kvot)

Ex: $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6-1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)}$$

$$\frac{63}{32}=\frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{64}-1}{\frac{1}{2}-1}$$

$a=1,\ k=\frac{1}{2}$

$$315=\frac{5\cdot(2^6-1)}{2-1}=5+10+20+40+80+160$$

$a=5,\ k=2$

$$G=a+ak+ak^2+\ldots+ak^{n-1}$$

$$=\frac{a(k^n-1)}{k-1}$$

$$kG - G = k(a + ak + \ldots + ak^{n-1}) - (a + \ldots + ak^{n-1})$$

$$= \cancel{ka} + \cancel{ak^2} + \ldots + \cancel{ak^{n-1}} + ak^n - a - \cancel{ak} - \cancel{ak^2} - \ldots - \cancel{ak^{n-1}} =$$

$$= ak^n - a$$

Alltså

$$G = \begin{cases} \dfrac{ak^n - a}{k-1}, & k \neq 1 \\ an, & k = 1 \end{cases}$$

Binomialkoefficienter:

$\binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$

$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2 b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$$

$\binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

binomialkoefficienter