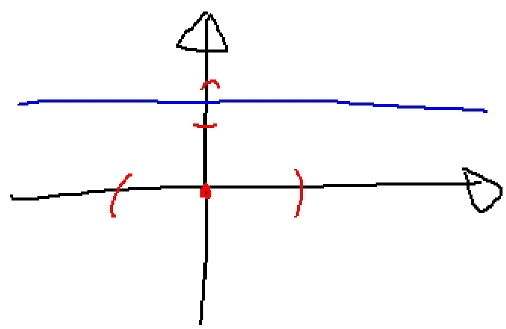
Egenskaper hos gränsvärden

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Låt $f(x) = C$ (en konstant)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = C$$

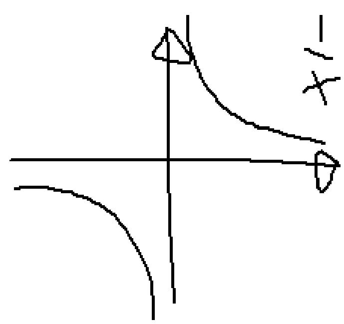


$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \left(\text{oegentligt gränsvärde}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad , \quad f(x) > 0$$

egentligt



Låt f och g vara funktioner sådana att $\lim_{x \to a} f(x) = A$ och $\lim_{x \to a} g(x) = B$. Då gäller det att

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = A + B$$

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - g(x) \right) = A - B$$

Givet $\varepsilon > 0$ så finns δ så att

$$|f(x) + g(x) - A - B| < \varepsilon$$

om $|x - a| < \delta$.

Bevis: $|f(x) + g(x) - A - B| =$

$$= |f(x) - A + g(x) - B| \leq$$

$$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

för lämpligt δ.

Vidare gäller också

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

och om $B \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Ex: Vad blir

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \ ?$$

SVAR: $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

Vad blir

$$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \ ?$$

SVAR: $\frac{\pi}{6}$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Sats: Om $f(x) \geq g(x)$

och $\lim_{x \to a} f(x) = A$ och

$\lim_{x \to a} g(x) = B$

så är $A \geq B$.

Sats: Om $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$

och $\lim_{x \to a} f(x) = A = \lim_{x \to a} h(x)$

så blir $\lim_{x \to a} g(x) = A$.

Ex: Vad blir $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$?

Då $\frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ blir

alltså $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0$

Vi vet också att $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x}$

så $0 = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0$

SVAR: $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Ex: Vad blir $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$?

Från gårdagens resonemangsuppgift

$$|\sin x| \le |x| \le |\tan x|, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Vi delar med $|x|$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1 \le \left|\frac{\tan x}{x}\right| \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$|\cos x| \le \left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

$$1 = \lim_{x \to 0} \cos x \le \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

SVAR: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Ex: Vad blir $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$?

Sätt $y = 3x$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y/3} = 3 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 3$$

Ex: Vad blir $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$?

SVAR: 1 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

Ex: $\lim_{x \to 1} \sin(\arctan x)$

Sätt $y = \arctan x$.

När $x \to 1$ så $y \to \frac{\pi}{4}$

Så $\lim_{x \to 1} \sin(\arctan x) = \lim_{y \to \frac{\pi}{4}} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Sats: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = \infty$ om $a>1$ och α konst

"exponentialfunktioner växer snabbare än polynom"

$x = a^t$

Sats: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0$ och $a>1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a(x) = 0$ $\quad \alpha>0$ konst

$x = \dfrac{1}{t}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \left[x = a^t \right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t}{(a^t)^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ t = \frac{1}{x} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^\alpha} \log_a\left(\frac{1}{t}\right) = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^\alpha} \log_a t =$$

$$= 0$$

Sats: $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ a reellt

Bevis: $\frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{1} =$

$n \geq a$

$$= \frac{a}{n} \cdot \underbrace{\frac{a}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{[a]+1}}_{<1} \cdot \frac{a^{[a]}}{[a]!}$$

$\frac{a}{n} \to 0$

$[a]$ heltalsdelen

Sats: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bevis: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$

$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$