Lösningar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Om $c \neq 0$ så saknar systemet lösningar eftersom vi får en ekvation $0 \neq 0$

Å andra sidan, om $c = 0$ så finns lösningar.

SATS: Ett linjärt ekvationssystem saknar lösningar precis då motsvarande trappstegsmatris innehåller en rad med bara 0:or i vänsterledet men ett tal $\neq 0$ i högerledet.

Antas nu att systemet har lösningar. Trappstegsmatrisen måste ha formen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Om trappstegsmatrisen innehåller en nollkolonn i vänsterledet eller något trappsteg har längd större än 1 så får vi oändligt många lösningar.

Alltså om trappstegsmatrisen saknar nollkolonn och alla trappsteg har längd ett kommer vi få en unik lösning.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right)$$

SATS: Ett linjärt ekvationssystem har antingen

- en lösning
- oändligt många lösningar
- saknar lösningar

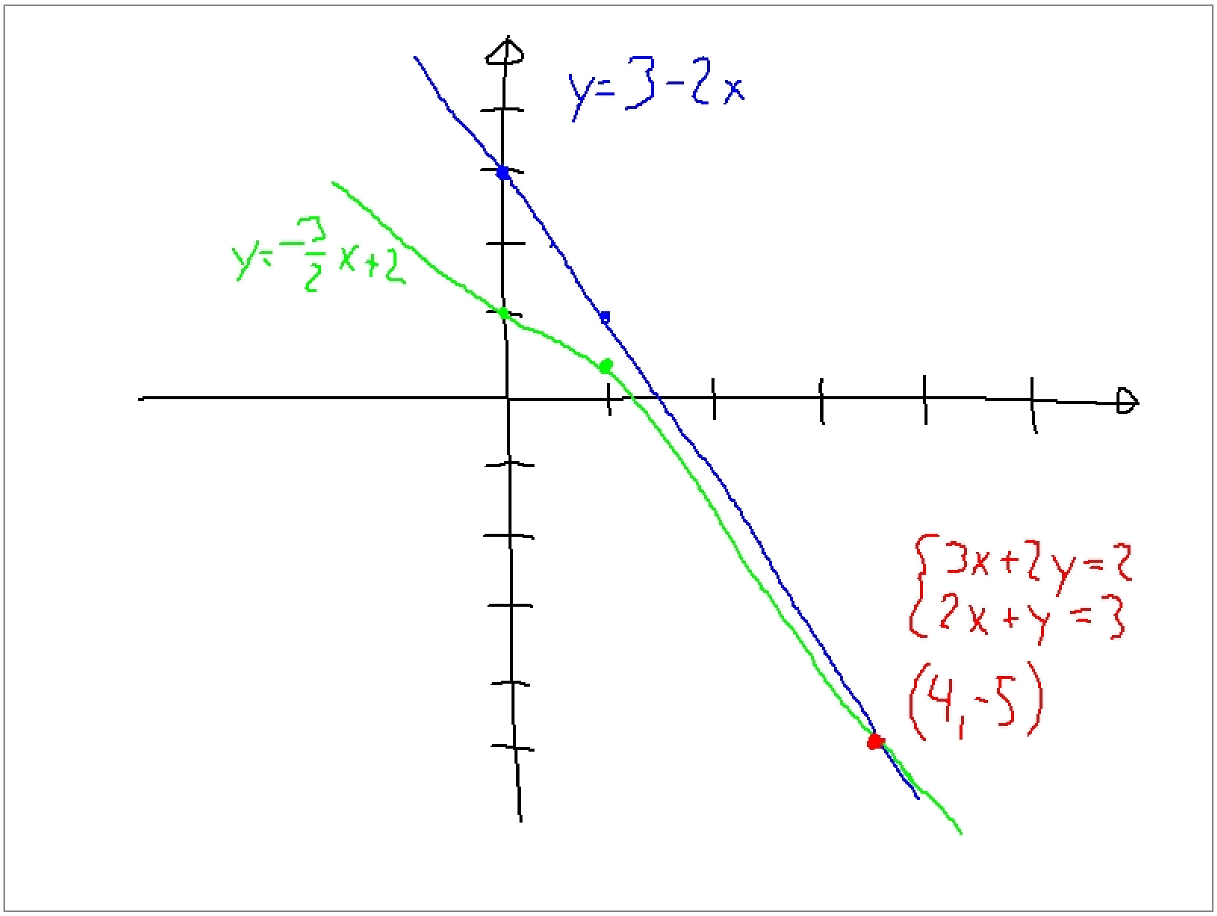
Geometri

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

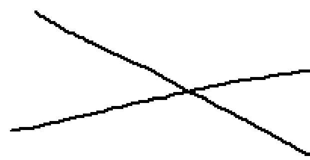
$$2x + y = 3 \iff y = 3 - 2x$$

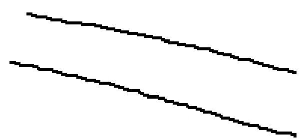
$$3x + 2y = 2 \iff y = \frac{2 - 3x}{2} = -\frac{3}{2}x + 1$$

Föreläsning 2, sid 7



Två ekvationer och två obekanta

I:  precis en lösning

II:  parallella, saknar lösningar

III:  samma linje, oändligt många lösningar

Homogena system

Ex:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

så högerledet består bara av nollor.

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} -2 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right) \; (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right) \; (-2) \; (5)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 39 & 0 \end{array}\right) \; \left(\tfrac{1}{39}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \; (13) \; (-8) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Homogena system har alltid minst en lösning. (geometriskt förstår vi det därför att de skär varandra åtminstone i origo) Så för homogena system finns bara möjligheterna

- en unik lösning, som då måste vara origo
- oändligt många lösningar

Typer av system

Om antalet obekanta överstiger antalet ekvationer säger vi att vi har ett **liggande system**.

Ex:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

2 ekvationer och 3 obekanta

Om antalet ekvationer överstiger antalet obekanta kallas systemet för <u>stående</u>.

Ex:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$$

4 ekvationer, 2 obekanta

Om antalet ekvationer är lika med antalet obekanta kallas systemet kvadratiskt.

Ex:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + 5y + 3z = 4 \end{cases}$$

3 ekvationer och 3 obekanta

Vad kan man säga om antalet lösningar till de olika typerna av system?

Liggande system:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

oändligt många lösningar

Det här gäller i allmänhet om lösningar finns.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right)$$

Eftersom antalet rader i ett liggande system är strik mindre än antalet kolonner måste något trappsteg ha längd större än 1 (annars finns en 0:kolonn) Därför har liggande system alltid oändligt många lösningar om de har några lösningar

Speciellt har homogena liggande system alltid oändligt många lösningar.

Stående system: saknar i allmänhet lösningar.

Ex:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \; -2 \qquad 3$$

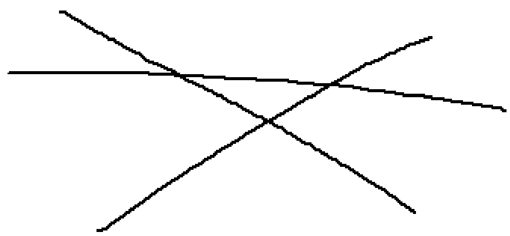
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

saknar lösningar

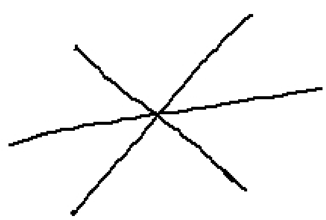
Eftersom antalet rader är större än antalet kolonner måste motsvarande trappstegs-matris innehålla en nollrad i vänsterledet.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right) \leftarrow \text{måste vara noll för att vi ska ha några lösningar}$$

Geometriskt:



I allmänhet



I speciella fall, t ex om systemet är homogent

Kvadratiska:

Om ett system för allmänna högerled har precis en lösning så är systemet kvadratiskt. Följer av att liggande system antingen har oändligt många lösningar eller inga alls och stående system i allmänhet saknar lösningar.

Om ett kvadratiskt system har precis en lösning för ngt högerled har den även det för allmänna högerled.

Det här beror på att när vi använder Gauss-Jordans metod och gör om vänsterledet till trappstegsform bryr man sig inte om hur högerledet ser ut (även om det påverkas)

Men för att få precis en lösning måste trappstegen i trappstegsmatrisen alla ha längd ett. Dessutom får det ej finnas någon nollkolonn. Då antalet rader är lika med antalet kolonner kan det då ej förekomma någon nollrad i vänsterledet.

Trappstegsmatrisen får därför formen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right)$$

som alltid ger precis en lösning oavsett högerled.

Simultana system

Ex: $\mathrm{I}: \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$, $\mathrm{II}: \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \; -2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \; -3$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right) \; -\frac{2}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\text{I}: \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases} \qquad \text{II}: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Uppgift:

Ge en definition med egna ord av vad som menas med en rät linje i rummet.