$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 9z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriser

		format
kvadratisk	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	3×3
kolonnvektor	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	3×1
radvektor	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	1×3

addition av matriser

$$(1, 2, 3) + (2, 0, 1) =$$

$$= (1+2, 2+0, 3+1) = (3, 2, 4)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 0+3 \\ 1+0 & 2+1 \\ 1+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

format: 3×2 $\quad$ 3×2 $\quad$ 3×2

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} =$$

Matriser av olika format går ej att addera!

(Tänk på vektorer.)

Föreläsning 3, sid 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{O}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{O}_{2\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{O}_{1\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 4-1 & 5-1 & 6-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Def: Om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

så definierar vi

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

där k är ett reellt tal.

Tex:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Speciellt om $k=0$

tex
$$0\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1&0\cdot2&0\cdot3\\0\cdot4&0\cdot5&0\cdot6\\0\cdot7&0\cdot8&0\cdot9\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_{3\times3}$$

Transponat

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Def: Transponatet till en matris fås genom att byta plats på rader och kolonner.

Ex: $$0_{3\times 3}^T = 0_{3\times 3}$$

$$0_{m\times n}^T = 0_{n\times m}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

SATS: $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}+\mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Föreläsning 3, sid 13

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B}^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{m1}+b_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrismultiplikation

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot4\\ 3\cdot1-1\cdot3 & 3\cdot2-1\cdot4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3\\ 3\cdot1+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}}$$

Föreläsning 3, sid 15

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{m\ell} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\ell 1} & \dots & b_{\ell n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$$

elementet i position (i,j) i $\mathbb{C}$ ges av

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \dots a_{i\ell} b_{\ell j} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$2 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 2$

2×2

$$\underset{(2\times \underline{3})\ (\underline{3}\times 2)}{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3\times 3}{\underset{(3\times 2)}{B}\underset{(2\times 3)}{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 3 + 1\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 3 + (-1)(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

OBS! att

$$\underset{2\times 2}{A\cdot B} \neq \underset{3\times 3}{BA}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot(-1) \\ 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 2+4(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 15 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

så inte ens för kvadratiska matriser gäller $\mathbb{AB} = \mathbb{BA}$

$$\mathbb{E}_{m\times m} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 \end{pmatrix}$$

Enhetsmatrisen (av format $m \times m$)

$$\mathbb{E}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 3 & 1\cdot 2 + 0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Föreläsning 3, sid 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathbb{E}_{3\times 3}}{3\times 3} \qquad 3\times 2 \qquad\qquad 3\times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3\times 2 \qquad \underset{\mathbb{E}_{2\times 2}}{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3×2) (2×1) (3×1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1×3) (3×2) (1×2)

Föreläsning 3, sid 22

$$(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \\ 34 \end{pmatrix}$$