forts inversen

Sats: En kvadratisk matris A, som har en högerinvers har även en vänsterinvers.

"Bevis idé": Högerinversen är lösningen till ekvationssystemet $AX = E$. Trappstegsformen för A måste då vara E. Men då finns U en produkt av elementära matriser ~~så att~~ $UA = E$, dvs U är en vänsterinvers till A.

Om A är inverterbar kan vi lösa ekvationen

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

genom att multiplicera till vänster med A^{-1}:

$$\mathbb{x} = (A^{-1}A)\mathbb{x} = A^{-1}(A\mathbb{x}) = A^{-1}\mathbb{b}$$

A inverterbar omm ekv $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ har precis en lösning; speciellt omm ekv $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ bara har lösningen $\mathbb{x} = \mathbb{0}$.

Determinanter

$\det A$ är ett tal

(A kvadratisk matris)

Antag att $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

determinanten ska vara linjär och alternerande i raderna.

- $\det \begin{pmatrix} u_1 + v \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

[Op 2] $$\det\begin{pmatrix} ku_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

[Op 3] $$\det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

[Op 1] $$\det\begin{pmatrix} u_1 + ku_2 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} ku_2 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + k \underbrace{\det\begin{pmatrix} u_2 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{=0}$$

för två rader är lika (Op3)

$$= \det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Alltså determinanten ändras inte vid [Op 1]. Vi har nu regler för hur determinanten ändras vid radoperationerna och kan därför nöja oss med att förstå trappstegsmatriser

Om vi har en nollrad i trappstegsmatrisen blir determinanten noll och vi sätter

$$\det E = 1.$$

Ex:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} \; (-2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = (-13) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-13) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-13) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-13) \cdot 1$$

Determinanten av en matris med nollor under diagonalen fås genom att ta produkten av elementen på diagonalen.

Ex: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1$

Sats: $\det A \neq 0 \iff A$ inverterbar

Sats: $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)$

SATS: $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 & 2 & 3) \\ (0 & 1 & 0) + (0, 0, 2) \\ (2 & 4 & -7) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} =$$

rad 3 = 2 rad 1

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \end{vmatrix} \cancel{+ 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \left(1 \cdot (-7) - 2 \cdot 3\right) - 2\left(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2\right)$$

$$= -13 - 2 \cdot 0 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 3 \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Hemläxa: Visa det!

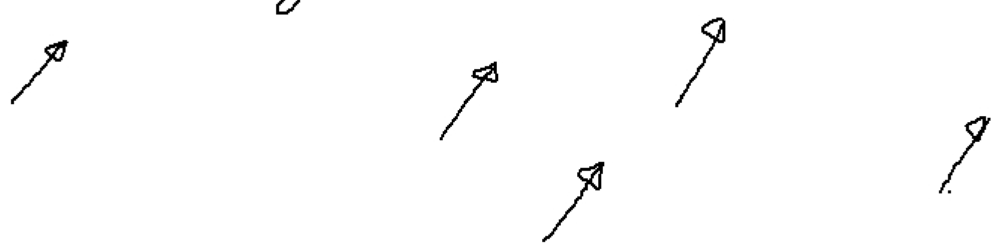
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

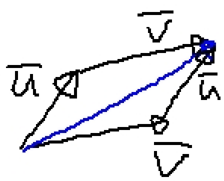
$$= 1 \cdot \left(1 \cdot (-7) - 4 \cdot 2 \right) + 2 \left(2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \right) =$$

$$= -15 + 2 = -13$$

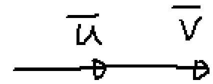
Vektorer

Definition: En vektor är mängden av alla pilar med en fix längd och riktning. Den representeras av ett godtyckligt element i mängden.





$\bar{u}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{u}$



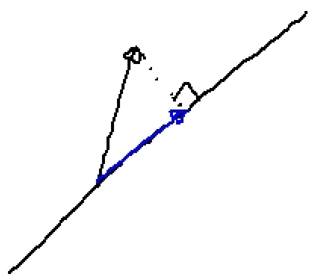
$$|\bar{u}+\bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|$$

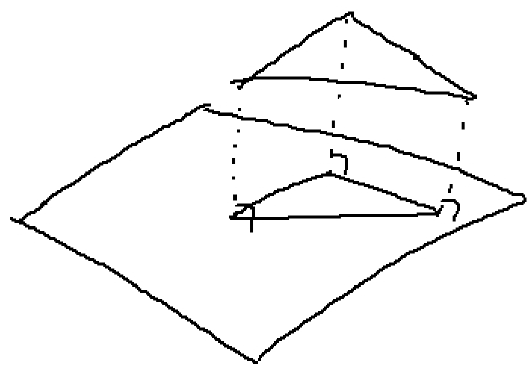
Vektorn $k\bar{u}$ ska vara
vektorn med samma riktning
som $\bar{u}$ men med längd $k|\bar{u}|$.
om $k>0$ om $k<0$ blir
riktningen den motsatta.

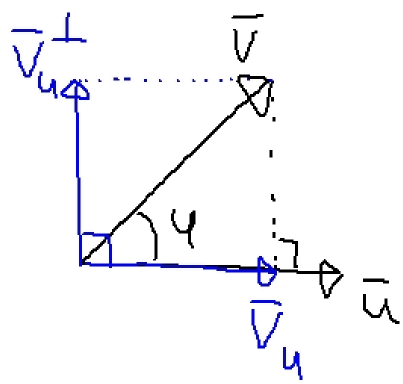
längden

Föreläsning 5, sid 13

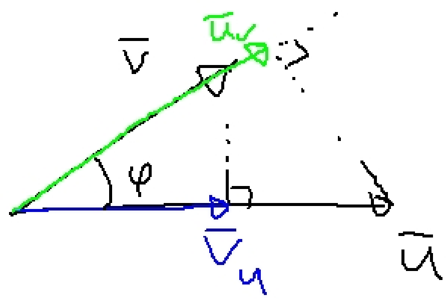
Vinkelrät projektion







$$|\bar{v}_u| = |\bar{v}||\cos\varphi|$$



$$|\bar{v}_u| = |\bar{v}||\cos\varphi|$$

$$|\bar{u}_v| = |\bar{u}||\cos\varphi|$$

Skalärprodukt

$$\bar{u} \cdot \bar{v} =$$

$$= |\bar{u}||\bar{v}|\cos\varphi$$

$$= \bar{v} \cdot \bar{u}$$

Egenskaper hos skalärprodukten

Def: $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos\varphi$

$\bar{u} \cdot \bar{v} > 0$ spetsig

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ rät vinkel

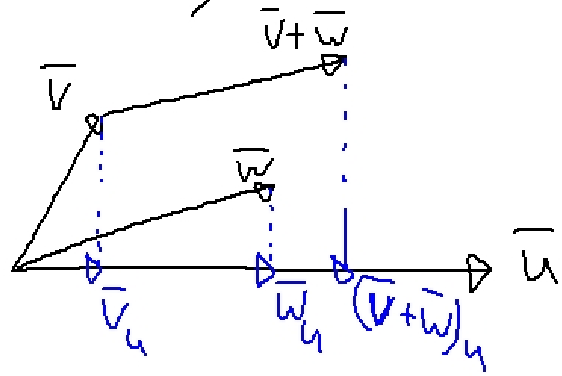
$\bar{u} \cdot \bar{v} < 0$ trubbig

$\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2 \geq 0$ med likhet

embart då $\bar{u} = \bar{0}$.

$$k(\bar{u}\cdot\bar{v}) = \bar{u}\cdot(k\bar{v}) = (k\bar{u})\cdot\bar{v}$$

$$\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$$



$$\bar{v}_u = (\bar{u}\cdot\bar{v})\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2} \qquad |\bar{v}_u| = \frac{|(\bar{u}\cdot\bar{v})|}{|\bar{u}|}$$