Grupparbeten omgång 1

Lösningen ska vara inlämnad senast den 18:e september vid lektionen eller per dator senast den 19:e september. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnet) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator ska filnamnet se ut så här(föstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg1, om ni tillhör grupp 1. Filen ska gå att öppna med openoffice.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1/8/15. a) En ekvation $ax + by = c$ definierar, som bekant, en linje i planet. Motivera varför motsvarande ekvation, $ax + by + cz = d$, i rummet, definierar ett plan.

b) Ge en geometrisk tolkning av systemet

Grupp 1: $$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Grupp 8: $$\begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 1 \\ 5x + 13y - z = -2 \end{cases}$$

Grupp 15: $$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 2x + 14y - 10z = 0 \end{cases}$$

c) Ge en geometrisk tolkning av hur systemet ändras med tiden, t.

Grupp 1: $$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 3z = t \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Grupp 8: $$\begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 1 \\ 5x + 13y - z = t \end{cases}$$

Grupp 15: $$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = t \end{cases}$$

Grupp 2/9/16. En elev har fått i uppgift att räkna ut inversen till en 3×3-matris, A, men när hon kollar sin resulterande matris, B,

Grupp 2: $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupp 9: $$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Grupp 16: $$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

genom att multiplicera med A får hon inte E utan följande

Grupp 2: $$AB = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

Grupp 9: $$AB = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & 0 & 0 \\ \frac{5}{12} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } BA = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{4}{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Grupp 16: $$AB = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{12} & 0 \\ 0 & \frac{13}{12} & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 1 \end{pmatrix} \text{ och } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{4}{12} & \frac{13}{12} \end{pmatrix},$$

Var i B har det blivit fel? Hur ska hon kunna rätta till sitt misstag utan att göra om räkningarna?

Grupp 3/10/17. Invertera matrisen nedan

Grupp 3: $$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupp 10: $$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupp 17: $$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observera att $A^{-1} = A^T$. Gå igenom räkningarna och se vilka egenskaper hos A det är som gör att det fungerar.

Grupp 4/11/18. Låt A vara en kvadratisk matris, då kallar vi λ för ett egenvärde till A om $\det(A - \lambda E) = 0$. En vektor $\vec{v}$ sägs vara en egenvektor till A om $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, för något reellt tal λ, som då måste vara ett egenvärde. Ta fram egenvärden och egenvektorer till matrisen

Grupp 4. $$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Grupp 11. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Grupp 18. $$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Grupp 4. Undersök vad som händer när en vektor multipliceras med A. Hur kan detta tolkas geometriskt? Hur kan resultatet för egenvektorerna förstås geometriskt?

Grupp 11 och 18. Bilda matrisen C genom att låta kolonnvektorerna i C vara de normerade egenvektorerna, svarande mot de olika egenvärdena, och beräkna $C^T AC$. Använd detta för att visa att det $A =$ produkten av egenvärdena. *Försök förstå det utan att räkna.

Grupp 5/12/19. Att lösa systemet $XA = E$ är ekvivalent med att lösa systemet $A^T X^T = E$. Finn alla vänsterinverser till

Grupp 5.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Grupp 12.
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupp 19.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

*Försök tänka ut hur Gauss-Jordan skulle se ut för den typen av system.
Ge villkor för existens av vänsterinverser till en allmän 3×2-matris.
*Försök ge en formel för inversen i det fallet.

Grupp 6/13/20. Det är lätt att se att det för en kvadratisk matris A gäller att $\det(A^T A) \geq 0$. Visa det! Låt nu A istället vara 3×2-matrisen nedan

Grupp 6. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Grupp 13. $$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Grupp 20. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observera att $\det(A^T A) \geq 0$ även i det fallet. Visa att det gäller allmänt för den typen av matriser. *Försök generalisera till mer allmänna fall.

Grupp 7/14/21. Låt A vara matrisen nedan

$$\text{Grupp 7.} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Grupp 14.} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Grupp 21.} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Skriv A och inversen till A som produkter av elementära matriser. Är uppdelningarna unika?