# Grupparbeten omgång 2

Lösningen ska vara inlämnad senast den 8:e oktober vid lektionen eller per dator senast den 9:e oktober. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnet) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator ska filnamnet se ut så här(förstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg2, om ni tillhör grupp 1. Filen ska gå att öppna med openoffice.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1: Spegla fyrhörningen, given av hörnen $(1, 0, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 1)$ och $(0, 2, 1)$, i planet $2x + y - 2z = 3$.

Grupp 2: I den speciella relativitetsteorin betraktar man världen som fyrdimensionell, med tiden som fjärde dimension. Man räknar som vanligt bortsett från att tiden tas imaginär och normerad så att koordinaten blir $ict$, där $c$ står för ljushastigheten, istället för bara $t$. Det här gör att mängden punkter, vars avstånd till origo är noll, inte bara består av origo självt. Låt oss för enkelhets skull ta bort en av rumsdimensionerna. Hur ser då mängden av punkter på avstånd noll från origo ut? *Kan ni förstå det utan att ta bort en dimension?

Grupp 3: Oktavionerna består av element som kan skrivas på formen: $a+bj+ce+dje$, där $a$, $b$, $c$ och $d$ är komplexa tal, och $j$ och $e$ är objekt som liksom den imaginära enheten, $i$, uppfyller $j^2 = e^2 = -1$. Vidare gäller sambanden $ij = -ji$, $ie = -ei$ och $je = -ej$. Produkten av två oktaver, eller Cayley tal som de också kallas, ges av följande recept

$$\begin{aligned}(a + bj + ce + d(je))(u + vj + we + r(je)) \quad = \quad & (au - b\bar{v} - c\bar{w} - r\bar{d}) + \\ & (av + b\bar{u} + r\bar{c} - d\bar{w})j + \\ & (c\bar{u} + d\bar{v} + aw - r\bar{b})e + \\ & (-cv + du + bw + r\bar{a})(je).\end{aligned}$$

Visa att produkten ej är associativ.

Grupp 4: Visa att varje tredjegradspolynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ kan skrivas om på formen $y^3 + py + q$ genom ett lämpligt variabelbyte. *Vem var Gauss?

Grupp 5: Låt $\mathrm{U}(n)$ vara mängden av komplexa $n \times n$-matriser som uppfyller $A^T \bar{A} = E$ och visa att den bevarar längden hos en komplex vector.

Grupp 6: Placera enhetssfären ovanpå origo i det komplexa talplanet. Förbind varje punkt i planet med nordpolen (origo tas som sydpol) genom en rät linje. Eftersom varje linje bara skär sfären en gång gör detta att vi kan identifiera sfären med planet bortsett från nordpolen. Vad avbildas en rät linje som går genom origo i planet på? Hur blir det med cirklar centrerade i origo? *Hur blir det med andra linjer och cirklar?

Grupp 7: Ett polynom kallas irreducibelt över de komplexa talen om det inte kan faktoriseras i faktorer av lägre grader med komplexa koefficienter. På samma sätt kallas ett polynom irreducibelt över de reella talen om det inte kan faktoriseras i reella faktorer av lägre grad. Vilka polynom är irreducibla över de komplexa talen? över de reella talen?

Grupp 8: Spegla triangeln med hörn $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ och $(4, -1, 0)$ i planet x-2y+3z=4.

Grupp 9: I den speciella relativitetsteorin betraktar man världen som fyrdimensionell, med tiden som fjärde dimension. Man räknar som vanligt bortsett från att tiden tas imaginär och normerad så att koordinaten blir $ict$, där $c$ står för ljushastigheten, istället för bara $t$. Låt oss betrakta Lorentztransformationen

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

där $x_1$, $x_2$ och $x_3$ är rumskoordinaterna och $x_4 = ict$ är tidskoordinaten. Lorentztransformationen ger koordinaterna i ett system som rör sig med hastighet $v$ i $x_1$-led relativt det oprimade systemet. När $x'_1 = 0$ får man att $x_1 = vt$. Använd det för att härleda uttryck för $x'_1$ och $x'_4$ i termer av $x_1$, $x_4$ och $v$.

Grupp 10: Låt $S$ vara mängden av par av komplexa tal $(a, b)$. Definiera multiplikation genom

$$(a, b)(c, d) = (ac - b\bar{d}, b\bar{c} + ad).$$

Visa att multiplikationen inte är kommutativ. Vilka tal kommuterar? De här talen kallas vanligen för kvaternioner.

Grupp 11: Visa att varje fjärdegradsekvation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ kan skrivas på formen $y^4 + py^2 + qy + r$ genom ett lämpligt variabelbyte. *Vem var Tartaglia?

Grupp 12: Visa att avbildningen

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

där $|a|^2 - |b|^2 = 1$, tar mängden $D = \{z; |z| < 1\}$ till sig själv.

Grupp 13: Spegla linjen $l := t(1,1,1)$ i planet $x + y - z = 2$.

Grupp 14: I den speciella relativitetsteorin betraktar man världen som fyrdimensionell, med tiden som fjärde dimension. Man räknar som vanligt bortsett från att tiden tas imaginär och normerad så att koordinaten blir $ict$, där $c$ står för ljushastigheten, istället för bara $t$. Låt oss inskränka oss till att vi har en rumsdimension och en tidsdimension. Antag att systemet $(x_1', x_2')$ rör sig med hastighet $v$ i $x_1$-led jämfört med systemet $(x_1, x_2)$. Det primade systemets koordinater fås då genom Lorentztransformationen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

där $\frac{v}{c} = i \tan\psi$. Finn en formel för addition av hastigheter.

Grupp 15: Låt $C$ vara mängden av par av reella tal. Vi definierar addition komponentvis som vanligt och multiplikation genom

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Visa att $C$ kan identifieras med $\mathbf{C}$.

Grupp 16: Verifiera att Cardanos formler nedan verkligen ger lösningar till ekvationen $y^3 + py + q = 0$.

**Cardanos formler:**

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v, \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(u+v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v), \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(u+v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v), \end{aligned}$$

där

$$u = (-\frac{q}{2} + \sqrt{D})^{1/3}, \qquad v = (-\frac{q}{2} - \sqrt{D})^{1/3}, \qquad D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2.$$

*Vem var Cardano?

Grupp 17: Visa att avbildningen $z \mapsto w := \frac{1}{z}$ tar linjen $y = -x + 1$ till cirkeln centrerad i punkten $\frac{1}{2}(1-i)$ och radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Här har vi använt att $z = x + iy$.