Grupparbeten omgång 3

Lösningen ska vara inlämnad senast den 29:e oktober vid lektionen eller per dator senast den 30:e oktober. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnet) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator ska filnamnet se ut så här(förstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg3, om ni tillhör grupp 1. Filen ska gå att öppna med openoffice. Skicka in datorlösningarna till mig.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1: Visa att $n! > a^n$ för alla $a \geq 0$ från och med något tillräckligt stort n. *samma sak fast med godtyckligt polynom i högerledet istället för a^n.

Grupp 2: Visa att en funktion f från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$ är kontinuerlig om och endast om det gäller att inversa bilden av öppna mängder är öppna.(räcker att kontrollera för öppna intervall)

Grupp 3: På samma sätt som för binomialkoefficienterna så kan vi definiera mer allmänt multinomialkoefficienter genom att säga att multinomialkoefficienten

$$\binom{n}{m_1 \dots m_k}$$

är koefficienten framför $x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k}$ i utvecklingen av $(x_1 + \ldots + x_k)^n$. Finn en formel för att räkna ut multinomialkoefficienterna.

Grupp 4: Låt

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

Visa att f är kontinuerlig och kan deriveras ett godtyckligt antal gånger.

Grupp 5: Ge exempel på funktioner sådana att $f \circ f(x) = x$. Hur måste grafen till en sådan funktion se ut?

Grupp 6: Använd definitionen på gränsvärden för att visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1-\frac{1}{k}}.$$

Grupp 7: Ekvationen $x^2y^2+2y^5=3$ definierar y som en funktion av x nära punkten $(1,1)$. Bestäm tangentlinjen till grafen i punkten $(1,1)$.

Grupp 8: Kombinatoriskt kan binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ ses som antalet delmängder med k element, k-delmängder, till en mängd med n element. Lista alla 3-delmängder till mängden $\{1,2,3,4,5\}$, jämför sedan listan med listorna av 3- resp. 2-delmängder till mängden $\{1,2,3,4\}$. Vad kan man dra för slutsatser? Använd detta för att ge ett bevis av identiteten

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

Grupp 9: Låt

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0 \quad x=0 \end{cases}.$$

a) Visa att för $n=1$ så är f kontinuerlig men ej deriverbar.

b) Visa att för $n=2$ så kan f deriveras en men inte två gånger.

c) Visa att i allmänhet, $n\geq 1$, kan f deriveras $n-1$ men inte n gånger.

Grupp 10: Visa att för en $n\times n$ matris, A, med nollor på och under diagonalen gäller $A^n=0$.

Grupp 11: En funktion kallas injektiv om $f(x)=f(y)$ bara kan inträffa om $x=y$. En funktion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$ kallas surjektiv om $V_f=\mathbf{R}$. En funktion som både är injektiv och surjektiv kallas bijektiv. Utvidga $f(x)=\frac{1}{x}$ till en bijektiv funktion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$. Ge exempel på funktioner som är injektiva men inte surjektiva och tvärtom.

Grupp 12: Ge ett nytt bevis av att reella ekvationer av udda grad alltid har minst en reell rot.

Grupp 13: En funktion sägs vara homogen om det gäller att $f(tx)=t^af(x)$ för t reellt och något a. Visa att en homogen funktion uppfyller $xf'(x)=af(x)$.

Grupp 14: Låt

$$\phi_0(x)=\begin{cases} x \quad 0\leq x\leq \frac{1}{2} 1-x \quad \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

och utvidga funktionen periodiskt. Låt $\phi_n(x)=\frac{\phi_0(4^nx)}{4^n}$ och sätt $f_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\phi_n(x)$. Rita för några värden på N och undersök var funktionen är deriverbar. Vad händer när N växer? *Vad tror ni kommer hända om vi låter N gå mot oändligheten?

Grupp 15: Visa att $2^n>n^4+2n^2+1$ för tillräckligt stora n. *samma sak fast för godtyckligt polynom i högerledet.

Grupp 16: Visa att om vi deriverar vektorn $(t,f(t))$ komponentvis så får vi riktningsvektorn för tangentlinjen i punkten $(t,f(t))$.

Grupp 17: Lös uppgift 1.9 i boken.