Grupparbeten omgång 4

Lösningen ska vara inlämnad senast den 21:a november vid lektionen eller per dator senast den 22:a november. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnet) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator ska filnamnet se ut så här(förstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg4, om ni tillhör grupp 1. Filen ska gå att öppna med openoffice. Skicka in datorlösningarna till mig.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1: Punkten ξ_k i intervallet $[x_{k-1}, x_k]$ i definitionen av Riemannsumman på sid 226 i boken kan tas godtyckligt. Låt L_n vara Riemannsumman man får genom att ta $\xi_k = x_{k-1}$ och R_n den då man tar $\xi_k = x_k$. En, i allmänhet, bättre approximation fås genom att ta medelvärdet $M_n = (L_n + R_n)/2$. Ett annat sätt är att ta mittpunkten, $\xi_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, den Riemannsumma man får då betecknar vi T_n. Simpsons approximation är en viktad kombination av de två sistnämnda summorna och fås genom att ta

$$S_{2n} = \frac{2M_n + T_n}{3}.$$

Anvämnd Simpsons metod för att approximera integralen

$$\int_1^2 e^{-x^2}\,dx$$

med fyra decimalers noggrannhet.
Vem var Simpson?

Grupp 2: Ge ett närmevärde, med fyra decimalers noggrannhet, till arean hos enhetscirkelskivan genom att inskriva respektive omskriva cirkeln med regelbundna polygoner med 2^n hörn, se K1.
Vem var Arkimedes?

Grupp 3: Fourierkoefficienterna till en funktion f fås genom att beräkna integralerna

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad \text{för } n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad \text{för } n \geq 1. \end{aligned}$$

Bestäm Fourierkoefficienterna till funktionen $f(x) = |x|$.
*Vad kan Fourierkoefficienterna användas till?

Grupp 4: Picards metod för att lösa ett initialvärdesproblem av typ

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

går ut på att approximera lösningen succesivt genom

$$y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y_{n-1}(t)\,dt.$$

Använd metoden för att lösa initialvärdesproblemet

$$y' = y^2 \qquad y(0) = 1.$$

Vem var Picard?

Grupp 5: En man står vid kanten av en cirkulär pool och vill komma till motsatta sidan så fort som möjligt. Låt oss anta att han springer dubbelt så snabbt som han simmar. Var är det mest lämpligt att han hoppar i och börjar simma?

Grupp 6: Den tidsoberoende Schrödinger ekvationen ges av

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Låt

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ U_0 & a < x < b \\ 0 & x \geq b. \end{cases}$$

Antag att $\psi(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$(inkommande och speglad våg) för $x < a$ och att $\psi(x) = Te^{ikx}$ för $x > b$. Bestäm sannolikheten, dvs $|T|^2$, för att vågen ska tränga igenom barriären.
Vem var Heisenberg?

Grupp 7: År 1986 havererade kärnkraftverket i Tjernobyl och moln med cesium 137 svepte in över Sverige. Idag finns ca 70% av det ursprungliga nedfallet kvar. Om vi antar att halten i ett område direkt efter händelsen uppmättes till 50 kBq per kvadratmeter, dvs 50 000 sönderfall per sekund. Hur stor mängd cesium föll det då ned per kvadratmeter i det området?
Vilka var Bunsen och Kichhoff?

Grupp 8: Den tidsoberoende Schrödingerekvationen ges av

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Låt

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ U_0 & x \geq L \end{cases}$$

Lösningarna på bägge sidor om $x = L$ måste passas ihop så att $\psi(x)$ blir kontinuerlig och att $\frac{d}{dx}\psi$ blir kontinuerlig. Antag att $\psi(0) = 0$.
Vem var Schrödinger?

Grupp 9: Ett klot med massan, M, fästs vid en metallfjäder. Enligt Hookes lag så drar fj̈dern med kraften $F = -kx$, där k är fjäderkonstanten och x är positionen från viloläget. Antag att klotet vid tidpunkten $t = 0$ släpps från läget x_0. Bestäm klotets rörelse.
(Ledning använd Newtons andra lag $M\frac{dv}{dt} = F$)
Vem var Hooke?

Grupp 10: Fourierkoefficienterna till en funktion f ges av

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad \text{för } n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad \text{för } n \geq 1. \end{aligned}$$

Bestäm Fourierkoefficienterna till funktionen $f(x) = x$.
Vem var Laplace?

Grupp 11: En aluminiumburk ska tillverkas. Låt oss idealisera bilden och anta att burken har formen av en cylinder med lock och botten. Vilka proportioner ska den ha för att rymma så stor volym som möjligt om arean antas fix lika med A? Samma fråga fas vi nu fixerar volymen till V och vill ha så stor area som möjligt?

Grupp 12: Antag att funktionen ψ uppfyller $\psi(0) = 0$ och $\psi(L) = 0$. Antag vidare att den uppfyller ekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x).$$

Bestäm de möjliga energinivåerna, dvs möjliga värden på E.
Vem var Bohr?

Grupp 13: Visa att kvadraten är den rektangel med störst area som kan skrivas in i en cirkel med radie 1.

Grupp 14: Ge ett närmevärde till π genom att approximera arean hos enhetscirkelskivan enligt Sekis recept: Börja med att skriva in fyra rätvinkliga trianglar hopsatta till en kvadrat. Sätt sedan nya trianglar med bas på hypotenusorna, två på varje och beräkna dess area . Fortsätt så tills ni bestämt π med en noggrannhet av tre decimaler.
Vem var Seki?

Grupp 15: Låt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Visa att $\langle \sin nx, \sin nx\rangle = 1$ och $\langle \sin nx, \sin mx\rangle = 0$ om $n \neq m$. Visa att det samma gäller för $\cos nx$.
Vem var Fourier?

Grupp 16: En pendel med längd, l, uppfyller ekvationen

$$l\frac{d^2\phi}{dt^2} + g\sin\phi = 0.$$

Den här ekvationens lösningar kan inte uttryckas i termer av elementära funktioner men om vi approximerar $\sin\phi$ med ϕ så går det. Lös den approximerade ekvationen och bestäm pendelns period.