Grupparbeten omgång 5

Lösningen ska vara inlämnad senast den 10:e december till lektionen. Markera tydligt gruppnummer och namn(stryk under efternamnet) och personnummer för samtliga medverkande. Arbetet ska försvaras vid samma lektion.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Använd MacLaurinutvecklingen av e^x för att bestämma e^A.

Grupp 2: Visa att π är ett irrationellt tal: Låt

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos(\frac{\pi}{2}x)\, dx.$$

Visa att

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} I_n = n!P\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

där P är ett polynom av grad $< 2n+1$. Antag nu att π vore rationellt, då skulle vi kunna skriva $\pi = \frac{a}{b}$. Identiteten ovan visar då att

$$J_n := b^{2n+1}\frac{I_n}{n!}$$

är ett heltal för alla n(inse det!). Men

$$J_n = \frac{b^{2n+1}}{n!}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx$$

och integranden är > 0 för $x \in [-1,1]$, så $J_n \neq 0$ för alla n. Det är dock lätt att se att $J_n \to 0$ när $n \to \infty$, vilket ger en motsägelse för en heltalsvärd funktion som går mot noll måste bli noll för för stora värden på n.(visa det!)

Grupp 3: Låt

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\pi > |t| > \epsilon} \frac{\sin(x-t)}{2\tan(\frac{t}{2})}\, dt.$$

Skriv om med hjälp av additionsformeln för sinus och bestäm funktionen $f(x)$.

Grupp 4: Målarens paradox: Låt grafen till $f(x) = \frac{1}{x}$, för $x \geq 1$ rotera kring x-axeln så att en oändlig strut bildas. Visa att struten kan fyllas med en ändlig mängd färg men att all världens färg inte räcker till att måla den.

Grupp 5: Lös begynnelsevärdesproblemet $(1+x)y' = py$ med $y(0) = 1$ genom att ansätta en potensserie för y,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Grupp 6: Låt

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+p}}{2^{2n+p} n!(n+p)!}.$$

Visa att

$$\frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x),$$

och

$$\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = x^{-p} J_{p+1}(x),$$

genom att derivera termvis och jämföra serierna. Använd detta för att visa identiteten

$$\frac{J_{p-1}(x)}{J_p(x)} = \frac{2p}{x} - \frac{1}{\frac{J_p(x)}{J_{p+1}(x)}}.$$

Visa att

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} \cos x$$

där c är någon konstant. Använd detta för att ge en utveckling av $\tan x$ som ett kedjebråk.

Grupp 7: Bestäm volymen hos ellipsoiden som fås genom att rotera ellipsen

$$2x^2 + y^2 = 1$$

kring x-axeln.

Grupp 8: Lös differentialekvationen $y' = 2xy$ genom att ansätta en potensserie för y, dvs

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

och derivera termvis.

Grupp 9: Låt

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\pi > |t| > \epsilon} \frac{\cos(x-t)}{2\tan(\frac{t}{2})}\, dt.$$

Skriv om med hjälp av additionsformeln för cosinus och bestäm funktionen $f(x)$.

Grupp 10: Bevisa att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

konvergerar för alla x.

Grupp 11: Beräkna volymen hos en kon med basradie r och höjd h.

Grupp 12: Bestäm arean innanför kurvan $r = \sin\theta \cdot \cos\theta$.

Grupp 13: Gamma funktionen definieras genom integralen

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Visa att den generaliserade integralen konvergerar och att $\Gamma(n+1) = n!$.

Grupp 14: Lös ekvationen $y' = y$, $y(0) = 1$ genom att ansätta en potensserie för y

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

och derivera termvis.

Grupp 15: Antag att

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där serien konvergerar för $|x| < R$. Visa att

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

dvs att utvecklingen är MacLaurinutvecklingen.

Grupp 16: Visa att koefficienterna i MacLaurinserien för

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

är Fibonaccitalen.