Institutionen för matematik
KTH

MODELLTENTAMEN

Tentamensskrivning, år–månad–dag, kl. x.00–(x + 5).00.

5B1132, Analytiska metoder och linjär algebra 1.

Godkänt på moment nr n ger godkänt på uppgift nr n på tentamen.
Betygsgränser:
3 godkänt på var och en av uppgifterna 1-5 och 3 poäng på ugifterna 6-10
4 godkänt på var och en av uppgifterna 1-5 och 7 poäng på ugifterna 6-10
5 godkänt på var och en av uppgifterna 1-5 och 12 poäng på ugifterna 6-10

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

---

1. Beräkna determinanten till matrisen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}^{-1}$ där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Bestäm avståndet från punkten $(9,-1,8)$ till sträckan med ändpunkterna $(1,1,1)$ och $(4,5,6)$.

3. Visa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = -\frac{n}{3^n}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + y = x^2 + 2\sin x$.

5. Undersök konvergensen av serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

6. Visa att $\tan x - 2\ln(\cos^2 x) \geq 2x^2$ då $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$. (4p)

7. Beräkna arean av det område som ligger mellan kurvan $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ och dess asymptoter. (4p)

8. Bestäm det komplexa talet a så att ekvationen
$$z^3 + (2-\mathrm{i})z^2 + (1-10\mathrm{i})z + a = 0$$
får roten $z = \mathrm{i}$. Lös ekvationen fullständigt. (4p)

9. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det av kurvan $y = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}}$ och x–axeln begränsade ändliga området roterar ett varv kring x–axeln. (4p)

10. Vilket är störst $\ln(1+\sqrt{2})$ eller $\dfrac{3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$? (4p)

Lösningsförslag till modelltentamen i Amelia I, 5B1132.

1. Man får

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ och}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -18.$$

Svar: $-18.$

---

2. Den sträckan som sammanbinder punkterna $(1,1,1)$ och $(4,5,6)$ har riktning $(4,5,6) - (1,1,1) = (3,4,5)$.

Sträckans ekvation är $\boldsymbol{r}(t) = (1,1,1) + t(3,4,5) = (1 + 3t,\ 1 + 4t,\ 1 + 5t)$ där $0 \le t \le 1$.

Avståndet från punkten $(9,-1,8)$ till en godtycklig punkt $\boldsymbol{r}(t)$ på sträckan ges av $\sqrt{(3t-8)^2 + (4t+2)^2 + (5t-7)^2} = \sqrt{50t^2 - 102t + 117}.$

Betrakta funktionen $f(t) = 50t^2 - 102t + 117$ (dvs avståndet i kvadrat), $0 \le t \le 1$. Vi har $f'(t) = 100t - 102 < 0$ vilket innebär att f är en avtagande funktion och dess minsta värde fås då $t = 1$. Det sökta avståndet är $\sqrt{f(1)} = \sqrt{65}.$

Svar: $\sqrt{56}.$

---

3. Vi kontrollerar att påståendet

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = -\frac{n}{3^n}$$

är sant för $n = 1$: $\dfrac{2-3}{3} = -\dfrac{1}{3}$. Detta är sant.

Antag att påståendet är sant för $n = m$, dvs antag att det är sant att

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2k-3}{3^k} = -\frac{m}{3^m}$$

Vi vill visa att påståendet är sant för $n = m + 1$, dvs vi vill visa att det är sant att

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2k-3}{3^k} = -\frac{m+1}{3^{m+1}}$$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2k-3}{3^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{2k-3}{3^k} + \frac{2(m+1)-3}{3^{m+1}} = \{ \text{ enligt antagandet } \} =$$

$$= -\frac{m}{3^m} + \frac{2m-1}{3^{m+1}} = \frac{-3m + 2m - 1}{3^{m+1}} = -\frac{m+1}{3^{m+1}}$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

---

4. Karakteristisk ekvation är här $r^2 + 1 = 0$. Dess rötter är $r = \pm i$. Följaktligen är $y_h = A \sin x + B \cos x$ den allmänna lösningen till $y'' + y = 0$.

Betrakta ekvationen $y'' + y = x^2$. Ansats $y = ax^2 + bx + c$ ger $y' = 2ax + b$ och $y'' = 2a$ vilket, insatt i ekvationen, ger $2a + ax^2 + bx + c = x^2$. Eftersom detta skall vara en identitet så måste koefficienterna för respektive x-potenser vara lika, dvs $a = 1$, $b = 0$ och $2a + c = 0$. Man får alltså partikulärlösningen $y_1 = x^2 - 2$.

Betrakta ekvationen $y'' + y = 2 \sin x$. Vi söker en partikulär lösning på formen $y = ax \cos x$. Man får $y' = a \cos x - ax \sin x$ och $y'' = -2a \sin x - ax \cos x$ vilket, insatt i ekvationen, ger $-2a \sin x = 2 \sin x$, dvs $a = -1$ och $y_2 = -x \cos x$ är en partikulärlösnin till ekvationen.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_1 + y_2$ dvs

Svar: $y = A \sin x + B \cos x + x^2 - 2 - x \cos x$.

---

5. Låt $a_n = \dfrac{n^2}{3^n}$. Vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\,(n+1)^2}{3^{n+1}\,n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^2}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Enligt kvotkriterium är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Svar: Serien är konvergent.

---

6. Sätt $f(x) = \tan x - 2 \ln(\cos^2 x) - 2x^2 = \tan x - 4 \ln(\cos x) - 2x^2$. Vi har

$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 4 \cdot \dfrac{-\sin x}{\cos x} - 4x = 1 + \tan^2 x + 4 \tan x - 4x$ och

$f''(x) = 2(1 + \tan^2 x) \tan x + 4(1 + \tan^2 x) - 4 = 2(1 + \tan x)^2 \tan x \geq 0$ vilket innebär att f' är växande i intervallet.

Efersom f' är växande och $f'(0) > 0$ så är $f'(x) > 0$ för alla x i intervallet, vilket medför att f är växande.

Eftersom f är växande och $f(0) = 0$ så är $f(x) \geq 0$ för alla $0 \leq x < \pi/2$.

---

7. Lodräta asymptoter: $y \to \infty$ om och endast om $x \to 0^+$. Alltså linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot.

Snedda asymptoter: $\dfrac{y}{x} \to 0$ och $y \to 0$ då $x \to \infty$. Alltså linjen $y = 0$ är en snedd asymptot.

Kurvan ligger i första kvadranten och har två asymptoter $x = 0$ och $y = 0$.

$$\text{Arean} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \{\sqrt{x} = t,\ dx = 2t\,dt\} = \int_0^\infty \frac{2}{1+t^2}\,dt = \Big[\arctan t\Big]_0^\infty = \pi/2.$$

Svar: $\pi/2$.

---

8. $z = i$ är en rot till ekvationen $\Rightarrow$ $i^3 + (2 - i)i^2 + (1 - 10i)i + a = 0$ $\Rightarrow$ $a = -8 - i$.
Divisionen av $z^3 + (2 - i)z^2 + (1 - 10i)z - 8 - i$ med $z - i$ ger $z^2 + 2z + 1 - 8i$.
Återstår att lösa ekvationen $z^2 + 2z + 1 - 8i = 0$ $\Leftrightarrow$ $(z + 1)^2 = 8i$.

Sätt $z + 1 = a + bi$. Man får

$$a^2 - b^2 + 2abi = 8i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow b = \pm a \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 4 \text{ och } b = a$$

alltså $a = b = \pm 2$.

Svar: i, $-3 - 2i$, $1 + 2i$.

---

9. Kurvan skär x–axeln då $x^2 - 5x + 6 = 0$ dvs $x = 2$ eller $x = 3$. Volymen ges av

$$V = \pi \int_2^3 y^2 \, dx = \pi \int_2^3 \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} \, dx.$$

Man får

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} = 1 + \frac{2}{x^2 - 5x + 4} = 1 + \frac{2}{(x-1)(x-4)} = 1 + \frac{-2/3}{x-1} + \frac{2/3}{x-4}$$

och

$$V = \pi \int_2^3 \left(1 - \frac{2/3}{x-1} + \frac{2/3}{x-4}\right) dx = \pi \left[x - \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{2}{3} \ln|x-4|\right]_2^3 = \pi - \frac{4\pi}{3} \ln 2.$$

Svar: $\pi - \dfrac{4\pi}{3} \ln 2.$

---

10. Betrakta funktionen $f(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{3x}{4 + x}$, $x \geq 0$. Vi har

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - \frac{12}{(4 + x)^2} = \frac{(x - 2)^2}{(1 + x)(4 + x)^2} \geq 0$$

vilket innebär att f är en växande funktion och eftersom $f(0) = 0$ så är $f(\sqrt{2}) > 0$, dvs $\ln(1 + \sqrt{2}) - \dfrac{3\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} > 0$

Svar: $\ln(1 + \sqrt{2})$ är störst.
